50 ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

DESDE CERO

MATEMÁTICAS CON JUAN



50 EJERCICIOS RESUELTOS · MÉTODO DE LA CLASE

https://youtu.be/pre3vgYjzPs

Índice de bloques

1. Ecuaciones elementales y circunferencia goniométrica (1–10).
2. Familias infinitas de soluciones (11–14).
3. Cambios de variable (15–20).
4. Ecuaciones con argumentos e intervalos (21–30).
5. Identidades trigonométricas y factorización (31–40).
6. Identidades y ejercicios finales (41–50).

Primera parte. Ecuaciones elementales

En los ejercicios 1–9 se buscan todas las soluciones en $0 \le x < 2\pi$. Se trabaja en radianes; la circunferencia goniométrica tiene radio 1. Los valores de seno y coseno son coordenadas, y la tangente es su cociente cuando $\cos x \neq 0$.

EJERCICIO 1 — Vídeo 00:22

$$\cos x = \frac{1}{2}, \qquad 0 \le x < 2\pi.$$

Resolución siguiendo la clase. Dibujamos una circunferencia goniométrica de radio 1, centrada en el origen. En el primer cuadrante trazamos el radio que forma el ángulo x y proyectamos su extremo sobre el eje horizontal. Se forma un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 1 y cuyo cateto adyacente a x mide $1/2$. Por definición,

$$\cos x = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}.$$

Las longitudes de los lados tienen unidades; la razón entre ellas no tiene dimensiones. *Todavía no hemos memorizado el ángulo: vamos a deducirlo.*

Reflejamos el triángulo respecto al cateto de longitud $1/2$, como si colocásemos un espejo. Las dos hipotenusas miden 1 y la base del triángulo formado mide $1/2+1/2=1$. Hemos construido un triángulo equilátero: cada ángulo mide $60°$. Así, en el primer cuadrante,

$$x_1 = 60° = \frac{\pi}{3}.$$

Pero el coseno también es positivo en el cuarto cuadrante. Allí se reproduce el mismo triángulo y el ángulo recorrido desde el eje horizontal positivo es

$$x_2 = 360° - 60° = 300° = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}.$$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{3} \quad \text{o} \quad x = \frac{5\pi}{3}}$$

Comprobación: en los dos puntos de la circunferencia la coordenada horizontal es $1/2$. El intervalo $[0, 2\pi)$ solo contiene esos dos puntos.

EJERCICIO 2 — Vídeo 08:07

$$\sin x = \frac{1}{2}, \qquad 0 \le x < 2\pi.$$

Resolución siguiendo la clase. Volvemos a dibujar la circunferencia de radio 1, pero ahora fijamos la altura $1/2$ sobre el eje vertical. El triángulo rectángulo del primer cuadrante tiene hipotenusa 1 y cateto *opuesto* al ángulo x de longitud $1/2$. Por eso,

$$\sin x = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{1/2}{1}.$$

Reflejamos ese triángulo, tal como hacemos en la pizarra, para completar un triángulo equilátero. El ángulo total del vértice correspondiente mide $60°$; la altura lo divide en dos ángulos iguales. Nuestro ángulo es, por tanto,

$$x_1 = \frac{60°}{2} = 30° = \frac{\pi}{6}.$$

El seno es una altura positiva también en el segundo cuadrante. El segundo triángulo se obtiene por simetría respecto al eje vertical; como la semivuelta mide $180°$,

$$x_2 = 180° - 30° = 150° = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{6} \quad \text{o} \quad x = \frac{5\pi}{6}}$$

Comprobación: la coordenada vertical de ambos puntos es $1/2$; en los otros cuadrantes es negativa.

EJERCICIO 3 — Vídeo 16:51

$$\sin x = 0, \qquad 0 \le x < 2\pi.$$

Resolución siguiendo la clase. Dibujamos la circunferencia goniométrica y recordamos que el seno representa la coordenada vertical del extremo del radio. También puede interpretarse como cateto opuesto dividido por hipotenusa, mientras el triángulo no esté degenerado. Al hacer que el ángulo se aproxime a $0°$, ese cateto se hace cada vez más pequeño y su longitud tiende a cero. En el punto $(1,0)$,

$$x_1 = 0, \qquad \operatorname{sin} 0 = 0.$$

Si seguimos girando hasta una semivuelta, el radio llega al punto $(-1,0)$: nuevamente la altura es cero,

$$x_2 = 180° = \pi, \qquad \operatorname{sin} \pi = 0.$$

Al dar una vuelta completa volveríamos al primer punto, pero 2π *no pertenece* al intervalo $[0, 2\pi)$.

$$\boxed{x = 0 \quad \text{o} \quad x = \pi}$$

Comprobación: son los dos cortes de la circunferencia con el eje horizontal.

EJERCICIO 4 — Vídeo 20:26

$$\cos x = 0, \qquad 0 \leq x < 2\pi.$$

Resolución siguiendo la clase. Dibujamos la circunferencia de radio 1 y un triángulo rectángulo en el primer cuadrante. El coseno es el cateto adyacente al ángulo dividido por la hipotenusa; como esta mide 1, el valor del coseno coincide con la abscisa del punto de la circunferencia. Al aumentar el ángulo hasta $90°$, la proyección horizontal se hace cero. Así,

$$x_1 = 90° = \frac{\pi}{2}.$$

Hay otra posición con abscisa cero, debajo del origen, cuando completamos tres cuartos de vuelta:

$$x_2 = 270° = \frac{3\pi}{2}.$$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{2} \quad \text{o} \quad x = \frac{3\pi}{2}}$$

Comprobación: los puntos $(0,1)$ y $(0,-1)$ son los únicos con coseno nulo en una vuelta.

EJERCICIO 5 — Vídeo 25:04

$$2\cos x - \sqrt{2} = 0, \qquad 0 \leq x < 2\pi.$$

Resolución siguiendo la clase. Primero despejamos el coseno mediante operaciones equivalentes:

$$2\cos x - \sqrt{2} = 0 \iff 2\cos x = \sqrt{2} \iff \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

En la circunferencia de radio 1, dibujamos un triángulo rectángulo cuyo cateto adyacente mide $\sqrt{2}/2$. Por Pitágoras, el otro cateto también mide $\sqrt{2}/2$:

$$1^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Reflejamos el triángulo, como en la pizarra: se completa un cuadrado. Cada ángulo agudo del triángulo inicial mide $45°$; por tanto, la primera solución es $x_1 = \pi/4$.

El coseno es positivo asimismo en el cuarto cuadrante, donde encontramos el triángulo reflejado por debajo del eje horizontal:

$$x_2 = 360° - 45° = 315° = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}.$$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{4} \quad \text{o} \quad x = \frac{7\pi}{4}}$$

Comprobación: en ambas posiciones $2\cos x - \sqrt{2} = 2(\sqrt{2}/2) - \sqrt{2} = 0$.

EJERCICIO 6 — Vídeo 31:26

$$\tan x = \sqrt{3}, \qquad 0 \leq x < 2\pi.$$

Resolución siguiendo la clase. La tangente es el cociente entre el cateto opuesto y el adyacente, o equivalentemente entre seno y coseno (si $\cos x \neq 0$). En el primer cuadrante tomamos un triángulo rectángulo con hipotenusa 1, cateto adyacente $1/2$ y opuesto $\sqrt{3}/2$. La geometría del triángulo equilátero nos permite reconocer el ángulo de $60°$:

$$\tan 60° = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}, \qquad x_1 = \frac{\pi}{3}.$$

Buscamos la otra posición en la circunferencia. En el tercer cuadrante tanto la coordenada horizontal como la vertical son negativas; al dividirlas, la tangente vuelve a ser positiva. El ángulo es una semivuelta más $60°$:

$$x_2 = 180° + 60° = 240° = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}.$$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{3} \quad \text{o} \quad x = \frac{4\pi}{3}}$$

Comprobación: $\tan(\pi/3) = \tan(4\pi/3) = \sqrt{3}$.

EJERCICIO 7 — Vídeo 36:11

$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad 0 \leq x < 2\pi.$$

Resolución siguiendo la clase. Antes de estudiar el signo menos consideramos la ecuación $\sin x = \sqrt{2}/2$. En la circunferencia de radio 1, el triángulo rectángulo isósceles tiene catetos de longitud $\sqrt{2}/2$ y ángulo agudo de $45° = \pi/4$: esta es nuestra referencia geométrica.

Ahora el seno debe ser *negativo*. El cateto vertical se representa hacia abajo; por tanto buscamos los cuadrantes tercero y cuarto. En el tercero, añadimos $45°$ a una semivuelta:

$$x_1 = 180° + 45° = 225° = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}.$$

En el cuarto, restamos esos $45°$ de una vuelta completa:

$$x_2 = 360° - 45° = 315° = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}.$$

$$\boxed{x = \frac{5\pi}{4} \quad \text{o} \quad x = \frac{7\pi}{4}}$$

Comprobación: los dos puntos tienen altura $-\sqrt{2}/2$.

EJERCICIO 8 — Vídeo 42:54

$$\cos x = -\frac{1}{2}, \qquad 0 \leq x < 2\pi.$$

Resolución siguiendo la clase. Comenzamos recordando el triángulo del primer ejercicio, cuya hipotenusa mide 1 y cuyo cateto horizontal mide $1/2$. El ángulo de referencia es $60° = \pi/3$, deducido mediante el reflejo que completa un triángulo equilátero.

Esta vez el coseno es $-1/2$: el punto debe quedar a la izquierda del eje vertical, porque la coordenada horizontal es negativa. En el segundo cuadrante el ángulo es

$$x_1 = 180° - 60° = 120° = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

En el tercer cuadrante, el mismo triángulo queda por debajo del eje horizontal y obtenemos

$$x_2 = 180° + 60° = 240° = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}.$$

$$\boxed{x = \frac{2\pi}{3} \quad \text{o} \quad x = \frac{4\pi}{3}}$$

Comprobación: ambos puntos tienen abscisa $-1/2$.

EJERCICIO 9 — Vídeo 47:39

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad 0 \leq x < 2\pi.$$

Resolución siguiendo la clase. Dibujamos en el primer cuadrante un triángulo rectángulo de hipotenusa 1 y cateto horizontal $\sqrt{3}/2$. Por Pitágoras, el cateto vertical vale

$$\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}.$$

Es la mitad de un triángulo equilátero. El ángulo junto al cateto horizontal es $30°$, así que

$$x_1=30°=\frac{\pi}{6}.$$

Como el coseno es positivo en el cuarto cuadrante, colocamos allí el triángulo simétrico. El ángulo desde el eje positivo, medido en sentido antihorario, es

$$x_2=360°-30°=330°=2\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{11\pi}{6}.$$

$$\boxed{x=\frac{\pi}{6}\quad\text{o}\quad x=\frac{11\pi}{6}}$$

Comprobación: las abscisas de los dos puntos son $\sqrt{3}/2$.

EJERCICIO 10 — Vídeo 52:07

$$\tan x=-1,\qquad x\text{ en el cuarto cuadrante.}$$

Resolución siguiendo la clase. Lo primero es respetar la condición especial del enunciado: *solo se permiten ángulos del cuarto cuadrante*. Recordamos que

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}.$$

Para que la tangente valga -1, el seno y el coseno deben tener el mismo valor absoluto y signos opuestos. Dibujamos el triángulo rectángulo isósceles de hipotenusa 1: sus catetos miden $\sqrt{2}/2$, y el ángulo agudo de referencia es $45°=\pi/4$.

En el cuarto cuadrante el cateto vertical es negativo y el horizontal positivo:

$$\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2},\qquad \cos x=\frac{\sqrt{2}}{2},\qquad \tan x=\frac{-\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2}=-1.$$

El ángulo buscado se obtiene restando $45°$ a una vuelta entera:

$$x=360°-45°=315°=2\pi-\frac{\pi}{4}.$$

$$\boxed{x=\frac{7\pi}{4}}$$

Comprobación: el valor satisface la ecuación y pertenece al cuarto cuadrante. El ángulo de $135°$ también tiene tangente -1, pero queda excluido por la restricción del enunciado.

Borrador pedagógico reconstruido siguiendo la explicación oral, no una transcripción literal de todos los gestos de la pizarra. Conservar la numeración y el minuto de inicio antes de incorporarlos a los 50.

Soluciones generales: ejercicios 11–14

En los diez ejercicios de este bloque la incógnita puede ser cualquier número real, sin la restricción $0 \le x < 2\pi$ de los primeros ejercicios. Siempre $k \in \mathbb{Z}$; k recoge vueltas tanto positivas como negativas.

EJERCICIO 11 — Vídeo 56:46

$$\sin x = \frac{1}{2}.$$

Siguiendo la clase. Ya hemos deducido geométricamente el ángulo de 30°: dibujamos la circunferencia de radio 1, fijamos la altura 1/2 y reflejamos el triángulo rectángulo para formar el equilátero. Su ángulo de 60° se divide en dos y obtenemos $\pi/6$.

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

Pero esta vez no estamos limitados a una vuelta. Al girar $360^\circ = 2\pi$ en sentido antihorario o horario, el extremo del radio regresa al mismo punto. Por ello la primera *constelación de soluciones* es

$$x_{1,k} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

En el segundo cuadrante el mismo cateto vertical es positivo y el ángulo es $\pi - \pi/6 = 5\pi/6$. Sumamos también cualquier número entero de vueltas:

$$x_{2,k} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{o} \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

Comprobación: la periodicidad $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$ y la simetría $\sin(\pi - x) = \sin x$ justifican ambas familias.

EJERCICIO 12 — Vídeo 1:02:45

$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Siguiendo la clase. Partimos del triángulo rectángulo isósceles obtenido al cortar un cuadrado por su diagonal. Con hipotenusa 1, sus catetos miden $\sqrt{2}/2$ y el ángulo de referencia es $45^\circ = \pi/4$. Dibujamos la circunferencia. El coseno es la coordenada horizontal: para ser negativo debemos mirar a la mitad izquierda. En el segundo cuadrante:

$$x_1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

En el tercero, el cateto horizontal sigue siendo negativo y

$$x_2 = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}.$$

Como enseñas con las vueltas horarias y antihorarias, alrededor de cada ángulo se generan infinitas soluciones sumando $2k\pi$.

$$\boxed{x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{o} \quad x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

Comprobación: los dos ángulos tienen abscisa $-\sqrt{2}/2$ y una vuelta completa no cambia el coseno.

EJERCICIO 13 — Vídeo 1:07:50

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Siguiendo la clase. En la circunferencia de radio 1 se forma un triángulo rectángulo con cateto opuesto $\sqrt{3}/2$ y adyacente 1/2. Por la construcción del equilátero reconocemos el ángulo de $60^\circ = \pi/3$, pues

$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}/2}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

La altura sigue siendo positiva en el segundo cuadrante, simétrico respecto al eje vertical. Allí el ángulo es

$$\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

Para representar todos los giros en torno a cada una de estas dos posiciones, sumamos vueltas enteras $2k\pi$.

$$\boxed{x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{o} \quad x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

Comprobación: en ambos puntos el seno es $\sqrt{3}/2$ y se conserva al sumar $2k\pi$.

EJERCICIO 14 **Vídeo 1:10:57**

$$\tan x = -\sqrt{3}.$$

Siguiendo la clase. Primero representamos el triángulo de 60°: cateto opuesto $\sqrt{3}/2$, adyacente $1/2$, hipotenusa 1. Su cociente es $\sqrt{3}$. Pero la tangente solicitada es negativa: seno y coseno deben tener signos contrarios. En el segundo cuadrante $\sin x > 0$ y $\cos x < 0$. El ángulo es

$$x_1 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}, \qquad \tan x_1 = -\sqrt{3}.$$

En el cuarto cuadrante $\sin x < 0$ y $\cos x > 0$, y

$$x_2 = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}, \qquad \tan x_2 = -\sqrt{3}.$$

Como en el vídeo, se pueden escribir dos ramas $x_1 + 2k\pi$ y $x_2 + 2k\pi$. Sin embargo, ambas posiciones se separan exactamente por una semivuelta π, y la tangente se repite tras cada semivuelta. Por ello podemos unirlas:

$$\boxed{x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}}$$

Comprobación: $\tan(x + \pi) = \tan x$; para $k = 0$ se obtiene $2\pi/3$ y para $k = 1$, $5\pi/3$.

Cambios de variable: ejercicios 15–20

En estos ejercicios el argumento no es simplemente x. Como en la clase, llamamos θ al argumento completo, resolvemos primero en θ y finalmente despejamos x.

EJERCICIO 15 **Vídeo 1:16:44**

$$\sin(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Siguiendo la clase. Hacemos $\theta = 2x$, por lo que $x = \theta/2$. Inicialmente resolvemos $\sin\theta = \sqrt{2}/2$ en la circunferencia goniométrica. El triángulo rectángulo isósceles del primer cuadrante tiene catetos $\sqrt{2}/2$ y ángulo $\pi/4$. Por reflexión respecto del eje vertical aparece la segunda posición $\pi - \pi/4 = 3\pi/4$. Añadiendo vueltas completas en ambos sentidos:

$$\theta_{1,k} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \qquad \theta_{2,k} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi.$$

Ahora *deshacemos el cambio*, dividiendo toda cada igualdad entre 2:

$$x_{1,k} = \frac{\pi}{8} + k\pi, \qquad x_{2,k} = \frac{3\pi}{8} + k\pi.$$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{8} + k\pi \quad \text{o} \quad x = \frac{3\pi}{8} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

Comprobación: al duplicar estos valores se recuperan los ángulos $\pi/4 + 2k\pi$ y $3\pi/4 + 2k\pi$.

EJERCICIO 16 **Vídeo 1:21:56**

$$\cos(3x) = -\frac{1}{2}.$$

Siguiendo la clase. Llamamos $\theta = 3x$. Buscamos primero $\cos\theta = -1/2$. El ángulo de referencia es $60° = \pi/3$, deducido del triángulo equilátero: hipotenusa 1 y proyección horizontal de módulo $1/2$. Como el coseno debe ser negativo, el extremo del radio está en el segundo o tercer cuadrante:

$$\theta_1 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}, \qquad \theta_2 = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}.$$

Con las vueltas completas:

$$\theta_{1,k} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \qquad \theta_{2,k} = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi.$$

Volvemos a x: $3x = \theta$ y dividimos cada término entre tres:

$$x_{1,k} = \frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, \qquad x_{2,k} = \frac{4\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}.$$

$$\boxed{x = \frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \quad \text{o} \quad x = \frac{4\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

Comprobación: multiplicando por 3, el coseno vuelve a valer $-1/2$.

EJERCICIO 17 Vídeo 1:29:29

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = -1.$$

Siguiendo la clase. Hacemos $\theta = x/2$, para recuperar al final $x = 2\theta$. Primero recuerdas la tangente positiva: $\tan\theta = 1$ cuando los catetos son iguales, como en el triángulo isósceles de $45^\circ = \pi/4$. Para que la tangente sea -1, las coordenadas deben tener signos contrarios. En el segundo cuadrante obtenemos

$$\theta_1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4},$$

y en el cuarto,

$$\theta_2 = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}.$$

Separamos primero las dos ramas al añadir vueltas completas:

$$\theta = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{o} \quad \theta = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi.$$

Como estas posiciones difieren en π y la tangente se repite tras una semivuelta, las reunimos:

$$\theta = \frac{3\pi}{4} + k\pi.$$

Finalmente multiplicamos toda la igualdad por 2:

$$\boxed{x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}}$$

Comprobación: $\tan(x/2) = \tan(3\pi/4 + k\pi) = -1$. También puede escribirse $x = -\pi/2 + 2k\pi$.

EJERCICIO 18 Vídeo 1:38:16

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

Siguiendo la clase. Introducimos $\theta = 2x + \pi/4$. En la circunferencia de radio 1, el seno es la coordenada vertical. Se hace cero en el eje horizontal: $\theta = 0$ y $\theta = \pi$. Si damos vueltas completas alrededor de cada posición tenemos las dos ramas

$$\theta = 2k\pi \quad \text{o} \quad \theta = \pi + 2k\pi.$$

Al unir ambas, como haces al considerar medias vueltas, escribimos simplemente

$$\theta = k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Deshacemos el cambio sin saltarnos operaciones:

$$2x + \frac{\pi}{4} = k\pi \quad \Longrightarrow \quad 2x = k\pi - \frac{\pi}{4}$$

$$\Longrightarrow \quad x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}.$$

$$\boxed{x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, \qquad k \in \mathbb{Z}}$$

Comprobación: sustituyendo en el argumento queda $2x + \pi/4 = k\pi$ y su seno vale cero.

EJERCICIO 19 Vídeo 1:45:07

$$\tan\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}.$$

Siguiendo la clase. Llamamos $\theta = 2x - \pi/6$. En el primer cuadrante dibujamos el triángulo rectángulo de hipotenusa 1 y catetos $\sqrt{3}/2$ (opuesto) y $1/2$ (adyacente). Así,

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3} \quad \Longrightarrow \quad \theta_1 = \frac{\pi}{3}.$$

La tangente también es positiva en el tercer cuadrante, donde ambos catetos tienen signo negativo:

$$\theta_2 = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}.$$

Cada posición admite vueltas enteras. Las dos ramas resultantes difieren en π y se reúnen mediante *medias vueltas*:

$$\theta = \frac{\pi}{3} + k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Recuperamos x sumando primero $\pi/6$ y dividiendo después entre 2:

$$2x = \frac{\pi}{3} + k\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}.$$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \qquad k \in \mathbb{Z}}$$

Comprobación: el argumento equivale a $\pi/3 + k\pi$ y su tangente vale $\sqrt{3}$.

EJERCICIO 20 **Vídeo 1:55:33**

$$\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = 1.$$

Siguiendo la resolución oral. Llamamos $\theta = 3x - \pi/6$ y resolvemos $\cos\theta = 1$. El coseno mide la coordenada horizontal del punto de la circunferencia de radio 1. Esa coordenada es exactamente 1 al estar en $(1, 0)$, correspondiente a $\theta = 0$. Repetimos la posición dando tantas vueltas enteras como queramos, horarias o antihorarias:

$$\theta = 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Ahora despejamos con cuidado:

$$3x - \frac{\pi}{6} = 2k\pi \quad \Longrightarrow \quad 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$$

$$\Longrightarrow \quad x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{18}.$$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}, \qquad k \in \mathbb{Z}}$$

Comprobación: $3x - \pi/6 = 2k\pi$; por tanto, su coseno es 1.

Ecuaciones con argumentos y restricciones: ejercicios 21–30

Todos los ejercicios se resuelven con $0 \le x < 2\pi$. La transformación del intervalo es fundamental para contar todas las soluciones sin añadir otras que estén fuera.

EJERCICIO 21 **Vídeo 2:00:26**

$$\sin(2x) = \frac{1}{2}.$$

Resolución siguiendo el vídeo. Hacemos $\theta = 2x$. La condición $0 \le x < 2\pi$ se transforma en $0 \le \theta < 4\pi$: ahora recorremos dos vueltas. Sobre la circunferencia de radio 1, el seno representa la altura. Una altura de $1/2$ determina el triángulo de ángulo de referencia $30^\circ = \pi/6$, deducido mediante la construcción del triángulo equilátero. Por simetría respecto del eje vertical también sirve $\pi - \pi/6 = 5\pi/6$. Sumamos una vuelta completa a cada ángulo, sin alcanzar 4π:

$$\theta \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}\right\}.$$

Volvemos a x dividiendo cada valor de θ entre 2.

$$\boxed{x \in \left\{\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}\right\}}$$

Comprobación: todas las soluciones indicadas están en $[0, 2\pi)$ y, al sustituirlas en el argumento, se obtienen los ángulos de la circunferencia identificados en el desarrollo.

EJERCICIO 22 **Vídeo 2:08:59**

$$\cos(2x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Resolución siguiendo el vídeo. Sea $\theta = 2x$; por tanto $0 \le \theta < 4\pi$. Construimos un triángulo rectángulo isósceles de hipotenusa 1: cada cateto tiene módulo $\sqrt{2}/2$, así que el ángulo de referencia es $\pi/4$. El coseno es negativo en los cuadrantes II y III, donde obtenemos $\pi - \pi/4 = 3\pi/4$ y $\pi + \pi/4 = 5\pi/4$. Puesto que θ puede recorrer dos vueltas, añadimos 2π a cada uno, comprobando que siguen dentro del intervalo:

$$\theta \in \left\{\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}\right\}.$$

Finalmente $x = \theta/2$.

$$\boxed{x \in \left\{\frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}\right\}}$$

Comprobación: todas las soluciones indicadas están en $[0, 2\pi)$ y, al sustituirlas en el argumento, se obtienen los ángulos de la circunferencia identificados en el desarrollo.

EJERCICIO 23 — Vídeo 2:16:33

$$\tan(2x) = 1.$$

Resolución siguiendo el vídeo. Introducimos $\theta = 2x$, con $0 \leq \theta < 4\pi$. La tangente es el cociente cateto opuesto / cateto adyacente. Si los catetos tienen igual módulo, el ángulo de referencia es $\pi/4$. La tangente es positiva en I y III: $\pi/4$ y $5\pi/4$. En una segunda vuelta aparecen $9\pi/4$ y $13\pi/4$. La circunferencia permite visualizar que todas estas posiciones están dentro de $[0, 4\pi)$ y que no hay más. Dividimos cada solución de θ entre dos.

$$\boxed{x \in \left\{\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}\right\}}$$

Comprobación: todas las soluciones indicadas están en $[0, 2\pi)$ y, al sustituirlas en el argumento, se obtienen los ángulos de la circunferencia identificados en el desarrollo.

EJERCICIO 24 — Vídeo 2:22:55

$$\sin(3x) = 0.$$

Resolución siguiendo el vídeo. Llamamos $\theta = 3x$. El intervalo original $0 \leq x < 2\pi$ se convierte en $0 \leq \theta < 6\pi$: son tres vueltas. En la circunferencia goniométrica, el seno es la coordenada vertical; vale cero en los extremos del diámetro horizontal, con ángulos 0 y π. Tras sumar vueltas completas a ambas posiciones y ordenar obtenemos:

$$\theta \in \{0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi\}.$$

El ángulo 6π no se incluye porque es extremo abierto. Deshacemos el cambio dividiendo por 3.

$$\boxed{x \in \left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}}$$

Comprobación: todas las soluciones indicadas están en $[0, 2\pi)$ y, al sustituirlas en el argumento, se obtienen los ángulos de la circunferencia identificados en el desarrollo.

EJERCICIO 25 — Vídeo 2:27:52

$$\cos(3x) = \frac{1}{2}.$$

Resolución siguiendo el vídeo. Sea $\theta = 3x$; entonces $0 \leq \theta < 6\pi$. En el triángulo rectángulo de hipotenusa 1, el cateto adyacente de longitud $1/2$ determina mediante el equilátero el ángulo $\pi/3$. El coseno también es positivo en el cuarto cuadrante, en $2\pi - \pi/3 = 5\pi/3$. Como podemos dar tres vueltas, añadimos sucesivamente 2π a cada una de las dos posiciones, quedándonos con seis ángulos:

$$\theta \in \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \frac{11\pi}{3}, \frac{13\pi}{3}, \frac{17\pi}{3}\right\}.$$

Despejamos $x = \theta/3$ y conservamos solo los valores del intervalo pedido.

$$\boxed{x \in \left\{\frac{\pi}{9}, \frac{5\pi}{9}, \frac{7\pi}{9}, \frac{11\pi}{9}, \frac{13\pi}{9}, \frac{17\pi}{9}\right\}}$$

Comprobación: todas las soluciones indicadas están en $[0, 2\pi)$ y, al sustituirlas en el argumento, se obtienen los ángulos de la circunferencia identificados en el desarrollo.

EJERCICIO 26 — Vídeo 2:35:30

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = 1.$$

Resolución siguiendo el vídeo. Ahora $\theta = x/2$, de modo que $0 \leq \theta < \pi$: solo media vuelta. En la circunferencia, la tangente vale uno cuando seno y coseno son iguales; construimos el triángulo rectángulo isósceles y obtenemos $\theta = \pi/4$. El siguiente ángulo con tangente uno sería $5\pi/4$, pero no pertenece a $[0, \pi)$. Deshacemos el cambio mediante $x = 2\theta$.

$$\boxed{x = \frac{\pi}{2}}$$

Comprobación: todas las soluciones indicadas están en $[0, 2\pi)$ y, al sustituirlas en el argumento, se obtienen los ángulos de la circunferencia identificados en el desarrollo.

EJERCICIO 27 **Vídeo 2:38:14**

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}.$$

Resolución siguiendo el vídeo. Hacemos $\theta = x+\pi/6$. Como $0 \le x < 2\pi$, hay que trasladar también el intervalo: $\pi/6 \le \theta < 13\pi/6$. El seno vale $1/2$ en $\pi/6$ y $5\pi/6$, como se deduce del triángulo de $30°$ y su reflejo en el segundo cuadrante. Añadir 2π a cualquiera de esos ángulos excede el extremo superior, salvo el extremo $13\pi/6$, que precisamente queda excluido. Por eso las únicas posibilidades son $\theta = \pi/6, 5\pi/6$. Despejamos $x = \theta - \pi/6$: el primer valor da 0 y el segundo $4\pi/6$.

$$\boxed{x \in \left\{0, \frac{2\pi}{3}\right\}}$$

Comprobación: todas las soluciones indicadas están en $[0, 2\pi)$ y, al sustituirlas en el argumento, se obtienen los ángulos de la circunferencia identificados en el desarrollo.

EJERCICIO 28 **Vídeo 2:43:50**

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0.$$

Resolución siguiendo el vídeo. Ponemos $\theta = x - \pi/4$. Al transformar los extremos queda $-\pi/4 \le \theta < 7\pi/4$; el intervalo no empieza en cero. El coseno, coordenada horizontal, se anula en la parte superior e inferior de la circunferencia: $\theta = \pi/2$ y $3\pi/2$. Las vueltas adicionales salen del intervalo. Regresamos a la incógnita original sumando $\pi/4$ a ambos ángulos.

$$\boxed{x \in \left\{\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}}$$

Comprobación: todas las soluciones indicadas están en $[0, 2\pi)$ y, al sustituirlas en el argumento, se obtienen los ángulos de la circunferencia identificados en el desarrollo.

EJERCICIO 29 **Vídeo 2:49:26**

$$\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=0.$$

Resolución siguiendo el vídeo. Definimos $\theta = 2x - \pi/3$. La restricción sobre x se convierte en $-\pi/3 \le \theta < 11\pi/3$. El seno vale cero sobre el eje horizontal, en $\theta = 0$ y π; añadiendo vueltas completas mientras permanezcamos dentro del intervalo obtenemos $\theta = 0, \pi, 2\pi, 3\pi$. Los valores $-\pi$ y 4π quedan fuera. Ahora $2x = \theta + \pi/3$, así que $x = \theta/2 + \pi/6$. Sustituimos los cuatro ángulos, sin omitir la suma de fracciones.

$$\boxed{x \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{3}\right\}}$$

Comprobación: todas las soluciones indicadas están en $[0, 2\pi)$ y, al sustituirlas en el argumento, se obtienen los ángulos de la circunferencia identificados en el desarrollo.

EJERCICIO 30 **Vídeo 2:56:56**

$$\cos\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)=-1.$$

Resolución siguiendo el vídeo. Sea $\theta = 3x + \pi/2$. Para $0 \le x < 2\pi$ se cumple $\pi/2 \le \theta < 13\pi/2$. El coseno, proyección horizontal sobre la circunferencia de radio 1, vale -1 en el punto $(-1, 0)$, cuyo primer ángulo positivo es $\theta = \pi$. Dando vueltas completas hallamos 3π y 5π; 7π sobrepasa el intervalo. Así, $\theta \in \{\pi, 3\pi, 5\pi\}$. Deshacemos el cambio: $3x = \theta - \pi/2$ y por ello $x = \theta/3 - \pi/6$.

$$\boxed{x \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right\}}$$

Comprobación: todas las soluciones indicadas están en $[0, 2\pi)$ y, al sustituirlas en el argumento, se obtienen los ángulos de la circunferencia identificados en el desarrollo.

Identidades trigonométricas y factorización: ejercicios 31–40

En cada ejercicio se mantiene la restricción indicada en la clase: cuando no se fija un intervalo, $k \in \mathbb{Z}$; cuando se exige $0 \le x < 2\pi$, seleccionamos solo las soluciones de esa vuelta.

EJERCICIO 31 **Vídeo 3:02:51**

$$2\sin x\cos x = 0.$$

Método de la clase. Primero dividimos ambos miembros entre dos; se obtiene $\sin x \cos x = 0$. Recordamos que un producto es cero si, al menos, uno de sus factores es cero. Hay que resolver por separado $\sin x = 0$ y $\cos x = 0$. La primera se cumple en el diámetro horizontal de la circunferencia, en 0 y π y sus repeticiones: $x = k\pi$. La segunda se cumple en los extremos del diámetro vertical, $\pi/2$ y $3\pi/2$, y sus repeticiones: $x = \pi/2 + k\pi$. Al intercalar ambas familias obtenemos una separación de media vuelta de un cuarto de giro, es decir $\pi/2$.

$$\boxed{x = \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

Comprobación. Si k es par, el seno es cero; si es impar, el coseno es cero. Por ello el producto se anula siempre.

EJERCICIO 32 — Vídeo 3:09:31

$$\sin(2x) = \sin x, \qquad 0 \le x < 2\pi.$$

Método de la clase. Escribimos primero la identidad del ángulo doble $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$ y sustituimos en la ecuación. Pasamos todo al primer miembro y sacamos factor común, exactamente como en la pizarra:

$$2\sin x \cos x - \sin x = 0 \iff \sin x(2\cos x - 1) = 0.$$

Separamos los dos casos. Para $\sin x = 0$, en la vuelta indicada, encontramos $x = 0$ o $x = \pi$ (no incluimos 2π). Para $2\cos x - 1 = 0$ tenemos $\cos x = 1/2$. En la circunferencia, mediante el ángulo notable de 60°, el coseno positivo corresponde al primer y cuarto cuadrantes: $\pi/3$ y $5\pi/3$.

$$\boxed{x \in \left\{0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}\right\}}$$

Comprobación. En los dos primeros casos de la factorización se anula uno u otro factor, por lo que todos los valores satisfacen la igualdad inicial.

EJERCICIO 33 — Vídeo 3:16:10

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1}{2}, \qquad 0 \le x < 2\pi.$$

Método de la clase. Reconocemos, antes de intentar despejar, la identidad $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x)$. Así se reduce la ecuación a $\cos(2x) = 1/2$. Introducimos $\theta = 2x$; el intervalo pasa a ser $0 \le \theta < 4\pi$. El coseno de un ángulo vale $1/2$ en $\pi/3$ y $5\pi/3$ durante la primera vuelta. Como θ recorre dos vueltas, añadimos 2π a cada posición:

$$\theta \in \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \frac{11\pi}{3}\right\}.$$

Deshacemos el cambio dividiendo entre dos cada valor.

$$\boxed{x \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}}$$

Comprobación. Duplicar cada solución da un ángulo cuyo coseno es $1/2$; por tanto se verifica la identidad usada.

EJERCICIO 34 — Vídeo 3:21:45

$$2\sin^2 x - \sin x = 0, \qquad 0 \le x < 2\pi.$$

Método de la clase. Sacamos factor común el seno: $\sin x(2\sin x - 1) = 0$. De nuevo, un producto nulo conduce a dos ecuaciones. La primera, $\sin x = 0$, produce 0 y π dentro del intervalo. La segunda, $2\sin x - 1 = 0$, equivale a $\sin x = 1/2$. La altura $1/2$ en la circunferencia determina por el triángulo equilátero el ángulo de $30° = \pi/6$. Por simetría respecto al eje vertical también sirve $\pi - \pi/6 = 5\pi/6$.

$$\boxed{x \in \left\{0, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \pi\right\}}$$

Comprobación. Cada solución hace que uno de los factores $\sin x$ o $2\sin x - 1$ sea cero.

EJERCICIO 35 — Vídeo 3:25:55

$$2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0, \qquad 0 \le x < 2\pi.$$

Método de la clase. En lugar de manipular ángulos desde el principio, hacemos $t = \cos x$. Obtenemos la ecuación de segundo grado ordinaria $2t^2 - 3t + 1 = 0$. Calculamos:

$$t = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4} \quad \Rightarrow \quad t = 1 \quad \text{o} \quad t = \frac{1}{2}.$$

Deshacemos el cambio: $\cos x = 1$ sucede en $x = 0$ de la vuelta considerada; $\cos x = 1/2$ sucede en los cuadrantes primero y cuarto, en $\pi/3$ y $5\pi/3$. No sumamos vueltas completas porque 2π está excluido.

$$\boxed{x \in \left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}}$$

Comprobación. Para $\cos x = 1$ se obtiene $2 - 3 + 1 = 0$; para $\cos x = 1/2$, $2(1/4) - 3/2 + 1 = 0$.

EJERCICIO 36 — Vídeo 3:30:35

$$\tan^2 x - 3 = 0, \qquad 0 \le x < 2\pi.$$

Método de la clase. Despejamos primero $\tan^2 x = 3$; por ello $\tan x = \sqrt{3}$ o $\tan x = -\sqrt{3}$. El ángulo de referencia $\pi/3$ se deduce del triángulo rectángulo con catetos de módulos $1/2$ y $\sqrt{3}/2$, cuya razón es $\sqrt{3}$. La tangente es positiva en I y III, de modo que aparecen $\pi/3$ y $4\pi/3$. Es negativa en II y IV, lo que da $2\pi/3$ y $5\pi/3$. En todos esos ángulos el coseno no es cero, así que la tangente existe.

$$\boxed{x \in \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}}$$

Comprobación. En cada solución $\tan x = \pm\sqrt{3}$ y por tanto $\tan^2 x = 3$.

EJERCICIO 37 — Vídeo 3:36:27

$$2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0.$$

Método de la clase. Ahora no se restringe x a una sola vuelta. Hacemos $t = \sin x$ y resolvemos $2t^2 - 5t + 2 = 0$ mediante la fórmula cuadrática:

$$t = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} \quad \Rightarrow \quad t = 2 \text{ o } t = \frac{1}{2}.$$

La igualdad $\sin x = 2$ es imposible, pues $-1 \le \sin x \le 1$. Queda $\sin x = 1/2$, cuyos ángulos base son $\pi/6$ y $5\pi/6$. Las vueltas completas en ambos sentidos generan las dos familias de soluciones, con k entero.

$$\boxed{x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{o} \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

Comprobación. Sustituyendo $\sin x = 1/2$, queda $2/4 - 5/2 + 2 = 0$.

EJERCICIO 38 — Vídeo 3:41:51

$$2\cos^2 x + 3\sin x = 0.$$

Método de la clase. Recordamos la identidad fundamental $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, que permite escribir $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Al sustituir:

$$2(1 - \sin^2 x) + 3\sin x = 0 \iff 2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0.$$

Tomamos $t = \sin x$. Se obtiene $2t^2 - 3t - 2 = 0$, cuyas soluciones son $t = (3 \pm 5)/4$, esto es 2 y $-1/2$. La primera no es admisible para un seno. En la circunferencia, la altura $-1/2$ se obtiene en los cuadrantes tercero y cuarto, en $7\pi/6$ y $11\pi/6$. Añadimos vueltas completas.

$$\boxed{x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{o} \quad x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

Comprobación. Con $\sin x = -1/2$, $\cos^2 x = 3/4$ y $2(3/4) + 3(-1/2) = 0$.

EJERCICIO 39 — Vídeo 3:49:24

$$\frac{1 - \cos x}{\sin x} = 1.$$

Método de la clase. La fracción original requiere $\sin x \neq 0$. Reconocemos la identidad de ángulo mitad $\tan(x/2) = (1 - \cos x)/\sin x$ dentro de su dominio de validez. Así la ecuación es $\tan(x/2) = 1$. Introducimos $\theta = x/2$. Los triángulos rectángulos isósceles justifican que la tangente es uno para $\theta = \pi/4$ y, como tiene período π, para $\theta = \pi/4 + k\pi$. Recuperamos $x = 2\theta$:

$$\boxed{x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

Comprobación. En esas posiciones $\cos x = 0$ y $\sin x = 1$, de modo que la fracción original vale 1 y su denominador no se anula.

EJERCICIO 40 — Vídeo 3:55:01

$$\frac{\sin x}{1 + \cos x} = 1.$$

Método de la clase. Aquí debe cumplirse $1 + \cos x \neq 0$. En el vídeo se reconoce que esta fracción y la del ejercicio anterior representan la misma función $\tan(x/2)$ siempre que estén definidas. De hecho,

$$\frac{\sin x}{1 + \cos x} \cdot \frac{1 - \cos x}{1 - \cos x} = \frac{\sin x(1 - \cos x)}{1 - \cos^2 x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x},$$

cuando los denominadores son distintos de cero. Por ello seguimos exactamente el argumento del ejercicio 39: $\tan(x/2) = 1$, así que $x/2 = \pi/4 + k\pi$ y despejamos x.

$$\boxed{x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

Comprobación. En cada valor $\sin x = 1$, $\cos x = 0$ y la fracción inicial es $1/(1+0) = 1$.

Identidades y problemas finales: ejercicios 41–50

La transcripción se ha cotejado con la numeración revisada: el ejercicio 47 empieza en 4:35:07. Siempre que no hay intervalo indicado, $k \in \mathbb{Z}$.

EJERCICIO 41 — Vídeo 3:59:30

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x = 1.$$

Método de la clase. Reconocemos la suma del seno de dos ángulos: $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a \sin b$. Como $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$ y $\sin(\pi/6) = 1/2$, el primer miembro se puede reescribir como

$$\sin x \cos\frac{\pi}{6} + \cos x \sin\frac{\pi}{6} = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right).$$

Introducimos $\theta = x + \pi/6$: $\sin\theta = 1$. En la circunferencia goniométrica el seno es 1 en el extremo superior, $\theta = \pi/2$. Dando vueltas completas en ambos sentidos, $\theta = \pi/2 + 2k\pi$. Deshacemos el cambio:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi.$$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

Comprobación. $\sin(x + \pi/6) = \sin(\pi/2 + 2k\pi) = 1$.

EJERCICIO 42 — Vídeo 4:02:49

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}.$$

Método de la clase. Dividimos ambos miembros entre $\sqrt{2}$; obtenemos $\sin x/\sqrt{2} + \cos x/\sqrt{2} = 1$. Usamos que $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2 = 1/\sqrt{2}$. Así:

$$\sin x \cos\frac{\pi}{4} + \cos x \sin\frac{\pi}{4} = 1 \iff \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

Ponemos $\theta = x + \pi/4$. El valor $\sin\theta = 1$ aparece en el punto superior de la circunferencia: $\theta = \pi/2 + 2k\pi$. Restamos $\pi/4$ en ambos miembros:

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi.$$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

Comprobación. $\sin(\pi/4) + \cos(\pi/4) = \sqrt{2}$.

EJERCICIO 43 — Vídeo 4:09:24

$$\sqrt{3}\cos x - \sin x = 1.$$

Método de la clase. Para aplicar la identidad $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a \sin b$, dividimos toda la igualdad entre dos:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x = \frac{1}{2}.$$

Como $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$ y $\sin(\pi/6) = 1/2$, la expresión se convierte en $\cos(x + \pi/6) = 1/2$. Llamamos $\theta = x + \pi/6$. En la circunferencia, el cateto adyacente vale $1/2$ y la hipotenusa vale 1. El triángulo de referencia da $\pi/3$; el coseno positivo aparece en el primero y el cuarto cuadrantes:

$$\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{o} \quad \theta = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi.$$

Restamos $\pi/6$:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{o} \quad x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi.$$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ o } x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

Comprobación. Ambos valores producen $\cos(x+\pi/6) = 1/2$.

EJERCICIO 44 — Vídeo 4:17:20

$$\sin(2x) + \cos(2x) = 0.$$

Método de la clase. Buscamos escribir la ecuación con una tangente. En una solución, $\cos(2x)$ no puede ser cero: si lo fuera, $\sin(2x) = \pm 1$ y la suma no sería cero. Dividimos legítimamente entre $\cos(2x)$:

$$\frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} + 1 = 0 \iff \tan(2x) = -1.$$

El ángulo de referencia es $\pi/4$, deducido del triángulo isósceles de catetos iguales. La tangente negativa se encuentra en los cuadrantes II y IV, y tiene período π; escribimos de manera compacta $2x = 3\pi/4 + k\pi$. Dividimos entre dos:

$$\boxed{x = \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

Comprobación. Si $2x = 3\pi/4 + k\pi$, el seno y el coseno son opuestos y su suma es cero.

EJERCICIO 45 — Vídeo 4:25:04

$$\sin x + \sin(2x) = 0.$$

Método de la clase. Utilizamos la identidad $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$ y agrupamos con factor común:

$$\sin x + 2\sin x \cos x = 0 \iff \sin x(1 + 2\cos x) = 0.$$

Un producto se anula si uno de sus factores se anula. Primer caso: $\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$. Segundo caso: $1 + 2\cos x = 0 \Rightarrow \cos x = -1/2$. El triángulo de referencia da $\pi/3$ y, como el coseno es negativo en II y III, los ángulos base son $2\pi/3$ y $4\pi/3$. Cada uno permite añadir vueltas completas:

$$\boxed{x = k\pi \text{ o } x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ o } x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

Comprobación. Cada familia hace nulo uno de los dos factores.

EJERCICIO 46 — Vídeo 4:31:25

$$\cos(3x) = \cos x.$$

Método de la clase. Recordamos la simetría de la función coseno: $\cos A = \cos B$ cuando $A = B + 2k\pi$ o $A = -B + 2k\pi$. Aplicamos ambas posibilidades a $A = 3x$, $B = x$:

$$3x = x + 2k\pi \Rightarrow 2x = 2k\pi \Rightarrow x = k\pi,$$

$$3x = -x + 2k\pi \Rightarrow 4x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}.$$

La primera familia ya está comprendida en la segunda (corresponde a los índices pares). Por ello:

$$\boxed{x = \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

Comprobación. Si $x = k\pi/2$, entonces $3x = x + k\pi$; en las posiciones dadas, ambos cosenos coinciden (son 0 o ± 1).

EJERCICIO 47 — Vídeo 4:35:07

$$\tan x + \tan(2x) = 0, \qquad 0 \le x < 2\pi.$$

Método de la clase. Se trata de la ecuación que has confirmado mediante la imagen de la pizarra. Es indispensable que $\cos x \neq 0$ y $\cos(2x) \neq 0$. Utilizamos la identidad de la tangente doble:

$$\tan(2x) = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}.$$

Hacemos $t = \tan x$ y sustituimos; como $1 - t^2 \neq 0$ dentro del dominio:

$$t + \frac{2t}{1 - t^2} = 0 \iff t(1 - t^2) + 2t = 0 \iff t(3 - t^2) = 0.$$

Así, $t = 0$, $t = \sqrt{3}$ o $t = -\sqrt{3}$. En la circunferencia goniométrica: $\tan x = 0$ en 0 y π; $\tan x = \sqrt{3}$ en $\pi/3$ y $4\pi/3$; $\tan x = -\sqrt{3}$ en $2\pi/3$ y $5\pi/3$. Todas quedan dentro del intervalo indicado y cumplen el dominio.

$$\boxed{x \in \left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}}$$

Comprobación. Las tres posibilidades $t = 0, \pm\sqrt{3}$ hacen cero $t(3 - t^2)$ y no anulan $1 - t^2$.

EJERCICIO 48 — Vídeo 4:44:29

$$\tan x = \sin x.$$

Método de la clase. Primero escribimos la tangente como cociente y explicitamos $\cos x \neq 0$:

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \sin x \iff \sin x \left(\frac{1}{\cos x} - 1\right) = 0.$$

Por el producto nulo: $\sin x = 0$ o $1/\cos x - 1 = 0$. La primera da $x = k\pi$ mediante medias vueltas desde el punto de partida de la circunferencia. La segunda equivale, multiplicando por $\cos x \neq 0$, a $\cos x = 1$ y produce $x = 2k\pi$, que ya está incluido en $x = k\pi$.

$$\boxed{x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

Comprobación. Si $x = k\pi$, el seno es cero y el coseno ± 1, por lo que ambas expresiones existen y valen cero.

EJERCICIO 49 — Vídeo 4:50:23

$$\frac{\sin(4x)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right)} = 1.$$

Método de la clase. Empezamos exigiendo que el denominador sea distinto de cero. Por la identidad de suma, $\cos(3\pi/2 + 2x) = \sin(2x)$; por tanto $\sin(2x) \neq 0$. Utilizamos el seno del ángulo doble:

$$\sin(4x) = 2\sin(2x)\cos(2x).$$

Al sustituir y simplificar el factor $\sin(2x)$, permitido por la condición anterior, queda $2\cos(2x) = 1$ o $\cos(2x) = 1/2$. Con $\theta = 2x$ los ángulos base son $\pi/3$ y $5\pi/3$:

$$2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{o} \quad 2x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi.$$

Dividimos entre dos y verificamos que el seno de $2x$ no se anula:

$$\boxed{x = \frac{\pi}{6} + k\pi \text{ o } x = \frac{5\pi}{6} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

Comprobación. Para esas familias, $2\cos(2x) = 1$ y $\sin(2x) = \pm\sqrt{3}/2 \neq 0$.

EJERCICIO 50 — Vídeo 4:57:45

$$\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3}, \\ \sin x + \sin y = \sqrt{3}, \end{cases} \qquad 0 \leq x, y < 2\pi.$$

Método de la clase. Despejamos $x = y + \pi/3$ en la primera ecuación y lo introducimos en la segunda:

$$\sin\left(y + \frac{\pi}{3}\right) + \sin y = \sqrt{3}.$$

Aplicamos la identidad de suma de senos, tal como se explica en la pizarra:

$$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}.$$

Con $A = y + \pi/3$ y $B = y$ obtenemos

$$2\sin\left(y + \frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}.$$

Dado que $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$, simplificamos: $\sin(y+\pi/6) = 1$. La circunferencia da $y+\pi/6 = \pi/2+2k\pi$, de donde $y = \pi/3+2k\pi$. Por las restricciones de la primera vuelta y $x - y = \pi/3$, solo sirve $y = \pi/3$, $x = 2\pi/3$.

$$\boxed{(x, y) = \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)}$$

Comprobación. $x - y = \pi/3$ y $\sin(2\pi/3) + \sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2 + \sqrt{3}/2 = \sqrt{3}$.