50 ECUACIONES IRRACIONALES

DESDE CERO

MATEMÁTICAS CON JUAN



Enunciados, condiciones de existencia y resoluciones paso a paso.

Edición didáctica · 50 ejercicios resueltos

Vídeo completo de la clase

https://www.youtube.com/watch?v=XIalBp32Y0Q

Ecuaciones irracionales: condiciones de existencia En las raíces de índice par, el radicando debe ser no negativo. En las de índice impar se admiten radicandos negativos. Elevar al cuadrado puede introducir soluciones extrañas; por eso es necesario comprobar los candidatos.

Índice de bloques

1. Radicales del mismo índice en ambos miembros (1–6).
2. Definición de raíz y simplificación (7–18).
3. Ecuaciones algebraicas al eliminar radicales (19–25).
4. Comprobación de soluciones extrañas (26–32).
5. Ecuaciones con dos radicales (33–34).
6. Cambios de variable y factorización (35–39).
7. Radicales anidados, potencias y expresiones racionales (40–46).
8. Retos finales (47–50).

Radicales del mismo índice en ambos miembros

Ejercicio 1 01:36

$$\sqrt{x} = \sqrt{9}$$

Resolución paso a paso.
Como las raíces cuadradas son iguales, $x = 9$. Comprobación: $\sqrt{9} = \sqrt{9}$.

Ejercicio 2 02:30

$$\sqrt{x+3} = \sqrt{7}$$

Resolución paso a paso.
$x + 3 = 7$, por tanto $x = 4$. Se comprueba: $\sqrt{7} = \sqrt{7}$.

Ejercicio 3 03:46

$$2\sqrt{2x-1} = \sqrt{x+5}$$

Resolución paso a paso.
Para que existan ambas raíces, $x \geq \frac{1}{2}$. Al cuadrar: $4(2x-1) = x+5$, luego $8x - 4 = x + 5$ y $7x = 9$. Así, $x = \frac{9}{7}$, que satisface la ecuación original.

Ejercicio 4 09:11

$$\sqrt[3]{x+5} = \sqrt[3]{2}$$

Resolución paso a paso.
Al tener igual índice impar, $x + 5 = 2$. Así, $x = -3$; se cumple la igualdad.

Ejercicio 5 11:28

$$\frac{\sqrt[3]{2x-3}}{2} = \sqrt[3]{-7}$$

Resolución paso a paso.
Multiplicamos por 2 y elevamos al cubo: $2x - 3 = 8(-7) = -56$. Por tanto $2x = -53$ y $x = -\frac{53}{2}$. Al sustituir, ambos miembros valen $\sqrt[3]{-7}$.

Ejercicio 6 16:16

$$\sqrt{\frac{1}{x-1}} = \sqrt{\frac{x-5}{x-7}}$$

Resolución paso a paso.

Exigimos que ambas fracciones estén definidas y sean no negativas. Igualamos radicandos: $\frac{1}{x-1} = \frac{x-5}{x-7}$. Multiplicando en cruz, $x-7 = (x-1)(x-5)$; por tanto $x^2 - 7x + 12 = 0 = (x-3)(x-4)$. Ambas soluciones, $x = 3$ y $x = 4$, cumplen las condiciones y verifican la igualdad original.

Definición de raíz y simplificación

Ejercicio 7 25:38

$$\sqrt{x} = 5$$

Resolución paso a paso.

Elevamos al cuadrado: $x = 25$. Se comprueba $\sqrt{25} = 5$.

Ejercicio 8 27:52

$$\sqrt[3]{x} = -3$$

Resolución paso a paso.

Elevamos al cubo: $x = (-3)^3 = -27$. Comprobación: $\sqrt[3]{-27} = -3$.

Ejercicio 9 28:56

$$\sqrt{\frac{x+2}{3}} = 2$$

Resolución paso a paso.

Cuadrando: $\frac{x+2}{3} = 4$. Así $x + 2 = 12$ y $x = 10$; es válida.

Ejercicio 10 30:37

$$\sqrt{x} = \sqrt{50} - \sqrt{8}$$

Resolución paso a paso.

Simplificamos $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ y $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Entonces $\sqrt{x} = 3\sqrt{2}$ y $x = (3\sqrt{2})^2 = 18$.

Ejercicio 11 37:26

$$\sqrt{x} + \sqrt{8} = \sqrt{18}$$

Resolución paso a paso.
Simplificamos $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ y $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$. Entonces $\sqrt{x} = \sqrt{2}$, por lo que $x = 2$. Comprobación: $\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

Ejercicio 12 42:10

$$\sqrt{3x+1} = 4$$

Resolución paso a paso.
$3x + 1 = 16$ implica $3x = 15$, luego $x = 5$. Comprobación: $\sqrt{16} = 4$.

Ejercicio 13 43:38

$$\sqrt[3]{2x-1} = 3$$

Resolución paso a paso.
$2x - 1 = 3^3 = 27$. Por tanto $2x = 28$ y $x = 14$.

Ejercicio 14 45:05

$$\sqrt[4]{x-1} = 2$$

Resolución paso a paso.
$x - 1 = 2^4 = 16$, de donde $x = 17$. La raíz cuarta principal de 16 es 2.

Ejercicio 15 46:25

$$\sqrt{\frac{2x-1}{x+3}} = 1$$

Resolución paso a paso.
Igualamos el radicando a 1: $\dfrac{2x-1}{x+3} = 1$, con $x \neq -3$. Entonces $2x - 1 = x + 3$, así que $x = 4$; válida.

Ejercicio 16 49:54

$$\frac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x-2}} = 5$$

Resolución paso a paso.
El denominador exige $x > 2$. Factorizamos $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ y, como $x > 2$, simplificamos: $\sqrt{x+2} = 5$. Así, $x + 2 = 25$, luego $x = 23$. Comprobación: $\dfrac{\sqrt{525}}{\sqrt{21}} = \sqrt{25} = 5$.

Ejercicio 17 54:52

$$\sqrt{\frac{x^3-27}{x^2+3x+9}}=5$$

Resolución paso a paso.
Como $x^2+3x+9=(x+\frac{3}{2})^2+\frac{27}{4}>0$ para todo x, podemos factorizar $x^3-27=(x-3)(x^2+3x+9)$ y simplificar el radicando a $x-3$. Se exige $x\geq 3$. La ecuación queda $\sqrt{x-3}=5$, luego $x-3=25$ y $x=28$. Al sustituir en la ecuación original se obtiene $\sqrt{25}=5$.

Ejercicio 18 1:00:54

$$\sqrt[3]{\frac{x-2}{x+1}}=-2$$

Resolución paso a paso.
Elevamos al cubo: $\frac{x-2}{x+1}=-8$, con $x\neq -1$. Se obtiene $x-2=-8x-8$, luego $9x=-6$ y $x=-\frac{2}{3}$.

Ecuaciones algebraicas al eliminar radicales

Ejercicio 19 1:04:06

$$\sqrt{x+5}=x-1$$

Resolución paso a paso.
Como el miembro derecho debe ser no negativo, $x\geq 1$. Al cuadrar: $x+5=(x-1)^2$, por lo que $x^2-3x-4=0=(x-4)(x+1)$. Descartamos -1; solución $x=4$, pues $\sqrt{9}=3=4-1$.

Ejercicio 20 1:09:43

$$\sqrt{2x+3}=x$$

Resolución paso a paso.
Debe cumplirse $x\geq 0$. Al cuadrar, $2x+3=x^2$, es decir, $(x-3)(x+1)=0$. -1 no sirve; $x=3$ sí, pues $\sqrt{9}=3$.

Ejercicio 21 1:16:57

$$\sqrt{x^2+9}=x+1$$

Resolución paso a paso.
El miembro derecho exige $x+1\geq 0$. Al cuadrar: $x^2+9=(x+1)^2=x^2+2x+1$. Resulta $2x=8$, luego $x=4$; $\sqrt{25}=5=4+1$.

Ejercicio 22 1:19:50

$$\sqrt{x^2-5x+13}=3$$

Resolución paso a paso.
$x^2-5x+13=9$, luego $x^2-5x+4=0=(x-1)(x-4)$. Ambas raíces $x=1$ y $x=4$ hacen que el radicando sea 9.

Ejercicio 23 1:24:05

$$\sqrt[3]{x+6}=x$$

Resolución paso a paso.
Elevamos al cubo, una operación equivalente para todo número real: $x+6=x^3$. Así, $x^3-x-6=0=(x-2)(x^2+2x+3)$. Como el segundo factor tiene discriminante $\Delta=4-12=-8<0$, no tiene raíces reales. La única solución es $x=2$. Comprobación: $\sqrt[3]{2+6}=2$.

Ejercicio 24 1:28:01

$$\sqrt{(x-1)^2}=2$$

Resolución paso a paso.
Usamos $\sqrt{u^2}=|u|$: $|x-1|=2$. Por tanto $x-1=2$ o $x-1=-2$, de donde $x=3$ o $x=-1$.

Ejercicio 25 1:32:02

$$\sqrt{\frac{1}{x-1}}=\frac{1}{2}$$

Resolución paso a paso.
El denominador exige $x-1>0$, es decir, $x>1$. Elevamos al cuadrado: $\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{1}{4}$. Multiplicando en cruz: $x-1=4$, de donde $x=5$. Comprobación: $\sqrt{\dfrac{1}{5-1}}=\sqrt{\dfrac{1}{4}}=\dfrac{1}{2}$.

Comprobación de soluciones extrañas

Ejercicio 26 1:34:55

$$\sqrt{x}=-x$$

Resolución paso a paso.
La raíz exige $x\geq 0$. Como $\sqrt{x}\geq 0$, la igualdad también exige $-x\geq 0$, es decir, $x\leq 0$. Por tanto, $x=0$, y se comprueba $\sqrt{0}=-0$. Si elevamos al cuadrado obtenemos $x=x^2$, con candidatos $x=0$ y $x=1$; este último es extraño, pues $\sqrt{1}\neq -1$.

Ejercicio 27 1:39:36

$$\sqrt{x+2} = x - 4$$

Resolución paso a paso.
Exigimos $x \geq 4$. Al cuadrar: $x + 2 = (x-4)^2$, así $x^2 - 9x + 14 = 0 = (x-7)(x-2)$. Solo $x = 7$ cumple $x \geq 4$; $\sqrt{9} = 3 = 7 - 4$.

Ejercicio 28 1:46:15

$$\sqrt{4x+1} = x + 2$$

Resolución paso a paso.
Cuadramos: $4x + 1 = (x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$. Se deduce $x^2 = -3$, imposible en $\mathbb{R}$. No hay soluciones reales.

Ejercicio 29 1:52:01

$$\sqrt{7-x} = x - 1$$

Resolución paso a paso.
Exigimos $1 \leq x \leq 7$. Cuadrando: $7 - x = (x-1)^2$, es decir, $x^2 - x - 6 = 0 = (x-3)(x+2)$. Solo $x = 3$ cumple las condiciones: $\sqrt{4} = 2$.

Ejercicio 30 1:56:42

$$\sqrt{x} = x - 2$$

Resolución paso a paso.
La igualdad exige $x \geq 2$. Al cuadrar, $x = (x-2)^2$, de donde $x^2 - 5x + 4 = 0 = (x-1)(x-4)$. El candidato $x = 1$ no cumple $x \geq 2$. La única solución es $x = 4$, pues $\sqrt{4} = 4 - 2 = 2$.

Ejercicio 31 2:02:15

$$\sqrt{5-4x} = x$$

Resolución paso a paso.
Como $\sqrt{5-4x} = x$, es necesario $x \geq 0$. Cuadrando: $5 - 4x = x^2$, luego $(x-1)(x+5) = 0$. Solo $x = 1$ vale: $\sqrt{1} = 1$.

Ejercicio 32 2:07:08

$$\sqrt{-x} = -x$$

Resolución paso a paso.
Para que exista la raíz, $x \leq 0$. Sea $t = \sqrt{-x} \geq 0$; entonces $-x = t^2$ y la ecuación es $t = t^2$. De $t(t-1) = 0$, $t = 0$ o $t = 1$: $x = 0, -1$.

Ecuaciones con dos radicales

Ejercicio 33 2:16:01

$$\sqrt{x+5}+\sqrt{x}=5$$

Resolución paso a paso.
Sea $a=\sqrt{x}$ y $b=\sqrt{x+5}$, con $a,b\geq 0$. Tenemos $a+b=5$ y $b^2-a^2=5$; así $(b-a)(b+a)=5$, luego $b-a=1$. Resolviendo, $a=2$, $b=3$, y $x=a^2=4$.

Ejercicio 34 2:22:42

$$\sqrt{x+7}-\sqrt{x}=1$$

Resolución paso a paso.
Sea $a=\sqrt{x}$ y $b=\sqrt{x+7}$. De $b-a=1$ y $b^2-a^2=7$ deducimos $(b-a)(b+a)=7$, por tanto $b+a=7$. Entonces $a=3$, $b=4$ y $x=9$.

Cambios de variable y factorización

Ejercicio 35 2:27:43

$$\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}=27$$

Resolución paso a paso.
Para todo $x\geq 0$, $\sqrt{x}\,\sqrt{x}=x$. La ecuación se reduce a $x=27$, que pertenece al dominio.

Ejercicio 36 2:30:43

$$\sqrt{x}+x=6$$

Resolución paso a paso.
Ponemos $t=\sqrt{x}\geq 0$ y $x=t^2$. Queda $t^2+t=6$, es decir, $(t+3)(t-2)=0$. Solo $t=2$ es admisible; $x=4$.

Ejercicio 37 2:34:41

$$\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}=6$$

Resolución paso a paso.
Sea $t=\sqrt[3]{x}\in\mathbb{R}$; entonces $\sqrt[3]{x^2}=t^2$. La ecuación es $t+t^2=6$, o $(t+3)(t-2)=0$. Por tanto $t=-3,2$ y $x=-27,8$. Ambas verifican la igualdad.

Ejercicio 38 2:37:02

$$1-\sqrt{-x}=-x-1$$

Resolución paso a paso.
Como $x \le 0$, ponemos $t=\sqrt{-x}\ge 0$, de modo que $-x=t^2$. La ecuación $1-t=t^2-1$ da $t^2+t-2=0=(t+2)(t-1)$. Solo $t=1$ sirve; $x=-1$.

Ejercicio 39 2:41:22

$$\frac{(\sqrt{x})^{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}=1$$

Resolución paso a paso.
La potencia real de exponente irracional exige $\sqrt{x}>0$, es decir, $x>0$. Multiplicamos por $\sqrt{2}$: $(\sqrt{x})^{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$. Como $\sqrt{x}=x^{1/2}$ y $\sqrt{2}=2^{1/2}$, tenemos $x^{\sqrt{2}/2}=2^{1/2}$. Elevando a $\sqrt{2}$, $x=2^{\sqrt{2}/2}$.

Radicales anidados, potencias y expresiones racionales

Ejercicio 40 2:45:47

$$\sqrt{3+\sqrt{x}}=\sqrt{5}$$

Resolución paso a paso.
Cuadramos ambos miembros: $3+\sqrt{x}=5$. De ahí $\sqrt{x}=2$, por lo que $x=4$.

Ejercicio 41 2:48:04

$$\sqrt{\sqrt{x}+1}=2$$

Resolución paso a paso.
Al cuadrar, $\sqrt{x}+1=4$, luego $\sqrt{x}=3$. Volvemos a cuadrar y obtenemos $x=9$.

Ejercicio 42 2:49:10

$$\sqrt{x+\sqrt{x}}=\sqrt{6}$$

Resolución paso a paso.
Cuadramos: $x+\sqrt{x}=6$. Sea $t=\sqrt{x}\ge 0$; entonces $t^2+t-6=0=(t+3)(t-2)$. Solo $t=2$, así que $x=4$.

Ejercicio 43 2:52:52

$$3 = \sqrt{x\sqrt{x}}$$

Resolución paso a paso.
Debemos tener $x \geq 0$. Cuadramos: $9 = x\sqrt{x} = x^{3/2}$. Elevando a $2/3$, $x = 9^{2/3} = \sqrt[3]{81}$.

Ejercicio 44 2:58:17

$$a\sqrt{a} = \sqrt{27}$$

Resolución paso a paso.
Necesitamos $a \geq 0$. Como $a\sqrt{a} = a^{3/2}$ y $\sqrt{27} = 3\sqrt{3} = 3^{3/2}$, la igualdad es $a^{3/2} = 3^{3/2}$. Por tanto $a = 3$.

Ejercicio 45 2:59:41

$$\frac{\sqrt{x}}{x} = 2$$

Resolución paso a paso.
El denominador obliga a $x > 0$. Multiplicamos por x: $\sqrt{x} = 2x$. Sea $t = \sqrt{x} > 0$; entonces $t = 2t^2$, es decir, $t(2t - 1) = 0$. Descartamos $t = 0$ por el denominador: $t = \frac{1}{2}$ y $x = \frac{1}{4}$.

Ejercicio 46 3:04:02

$$\sqrt{x+2} = \frac{x}{\sqrt{x+2}}$$

Resolución paso a paso.
Para que exista el denominador, $x + 2 > 0$. Multiplicamos por $\sqrt{x+2}$: $x + 2 = x$, contradicción $2 = 0$. No existen soluciones reales.

Retos finales

Ejercicio 47 3:06:00

$$\log_2 \sqrt{x+1} = 3$$

Resolución paso a paso.
Por definición de logaritmo, $\log_2 \sqrt{x+1} = 3$ equivale a $\sqrt{x+1} = 2^3 = 8$. Al cuadrar, $x + 1 = 64$, luego $x = 63$; cumple el dominio.

Ejercicio 48 3:11:40

$$2^{\sqrt{x+1}} = 16$$

Resolución paso a paso.
Como $16 = 2^4$ y la función 2^t es inyectiva, $\sqrt{x+1} = 4$. De aquí $x + 1 = 16$ y $x = 15$, válido.

Ejercicio 49 3:13:26

$$\sqrt{x} = |x - 2|$$

Resolución paso a paso.
Condición: $x \geq 0$. Si $x \geq 2$, entonces $\sqrt{x} = x - 2$; al cuadrar, $(x - 1)(x - 4) = 0$, y solo sirve $x = 4$. Si $0 \leq x < 2$, entonces $\sqrt{x} = 2 - x$; al cuadrar se obtiene la misma ecuación, y solo sirve $x = 1$. Ambas verifican la igualdad original: $\sqrt{1} = |1 - 2| = 1$ y $\sqrt{4} = |4 - 2| = 2$.

Ejercicio 50 3:20:46

$$\sqrt{2 + \operatorname{sen} x} = 1$$

Resolución paso a paso.
La raíz exige $2 + \operatorname{sen} x \geq 0$, condición siempre cierta porque $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$. Cuadramos: $2 + \operatorname{sen} x = 1$, luego $\operatorname{sen} x = -1$. Por tanto $x = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.