

50 PROBLEMAS DE CINEMÁTICA

MATEMÁTICAS CON JUAN



Colección completa resuelta paso a paso

Vídeo de la clase: <https://youtu.be/Xcj5t0as02k>

Índice de contenidos

Movimiento rectilíneo uniforme (MRU) — Problemas 1–5	2
Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA) — Problemas 6–15	4
Caída libre y lanzamiento vertical — Problemas 16–24	8
Problema del pájaro: movimiento unidimensional — Problema 25	10
Movimiento en dos dimensiones y composición — Problemas 26–33	10
Movimiento circular — Problemas 34–44	12
Cinemática mediante derivadas e integrales — Problemas 45–50	15

Movimiento rectilíneo uniforme (MRU)

Problemas 1–5. En un MRU la velocidad permanece constante y se cumple

$$d = vt, \quad v = \frac{d}{t}, \quad t = \frac{d}{v}.$$

Problema 1. Velocidad necesaria

► 0:37

Enunciado. Un automóvil debe recorrer 210 km en 2 horas y 30 minutos. ¿Qué velocidad constante debe mantener para completar el trayecto en ese tiempo?

Resolución.

Expresamos el tiempo en horas:

$$2 \text{ h } 30 \text{ min} = 2 + \frac{30}{60} = 2,5 \text{ h.}$$

Por tanto,

$$v = \frac{d}{t} = \frac{210}{2,5} = 84 \text{ km/h.}$$

Respuesta: Debe mantener una velocidad constante de 84 km/h.

Problema 2. Distancia recorrida

► 3:25

Enunciado. Un coche circula durante 25 minutos con una velocidad constante de 72 km/h. ¿Qué distancia recorre?

Resolución.

Convertimos el tiempo a horas:

$$25 \text{ min} = \frac{25}{60} \text{ h} = \frac{5}{12} \text{ h.}$$

Así,

$$d = vt = 72 \cdot \frac{5}{12} = 30 \text{ km.}$$

Respuesta: El coche recorre 30 km.

Problema 3. Avión con viento de cola

► 6:27

Enunciado. Un avión mantiene una velocidad de 700 km/h respecto al aire. Durante un trayecto de 1 600 km recibe un viento de cola constante de 100 km/h. Calcula su velocidad respecto al suelo y el tiempo que tarda en completar el trayecto.

Resolución.

El viento actúa en la misma dirección y el mismo sentido que el avión, de modo que las velocidades se suman:

$$v_{\text{suelo}} = v_{\text{avión/aire}} + v_{\text{viento}} = 700 + 100 = 800 \text{ km/h.}$$

El tiempo de vuelo es

$$t = \frac{d}{v_{\text{suelo}}} = \frac{1600}{800} = 2 \text{ h.}$$

Respuesta: La velocidad respecto al suelo es 800 km/h y el trayecto dura 2 h.

Comprobación: $800 \cdot 2 = 1600 \text{ km.}$

► 10:24

Problema 4. Encuentro entre dos coches

Enunciado. Dos coches parten simultáneamente desde dos ciudades separadas 300 km y circulan el uno hacia el otro. El primero mantiene una velocidad de 80 km/h y el segundo, de 70 km/h. Calcula cuánto tardan en encontrarse y la distancia recorrida por cada coche.

Resolución.

Como se aproximan, la distancia entre ellos disminuye a razón de

$$v_{\text{rel}} = 80 + 70 = 150 \text{ km/h.}$$

El tiempo hasta el encuentro es

$$t = \frac{300}{150} = 2 \text{ h.}$$

Las distancias recorridas son

$$d_1 = 80 \cdot 2 = 160 \text{ km,} \quad d_2 = 70 \cdot 2 = 140 \text{ km.}$$

Respuesta: Se encuentran después de 2 h. El primer coche recorre 160 km y el segundo, 140 km.

Comprobación: $160 + 140 = 300$ km, que es la separación inicial.

► 15:24

Problema 5. Alcance con salida retrasada

Enunciado. Un coche sale de una ciudad a una velocidad constante de 60 km/h. Una hora después, un segundo coche parte desde el mismo lugar, en la misma dirección y a 90 km/h. Calcula cuánto tarda el segundo coche en alcanzar al primero, contado desde su propia salida, y a qué distancia de la ciudad se produce el alcance.

Resolución.

En la primera hora, el primer coche consigue una ventaja de

$$d_{\text{ventaja}} = 60 \cdot 1 = 60 \text{ km.}$$

Desde que sale el segundo coche, la ventaja disminuye a razón de

$$v_{\text{rel}} = 90 - 60 = 30 \text{ km/h.}$$

Por tanto,

$$t = \frac{60}{30} = 2 \text{ h.}$$

La posición del alcance, calculada con el segundo coche, es

$$d = 90 \cdot 2 = 180 \text{ km.}$$

Respuesta: El segundo coche tarda 2 h en alcanzarlo y el alcance se produce a 180 km de la ciudad.

Comprobación: El primero circula durante 3 h y recorre $60 \cdot 3 = 180$ km; el segundo circula durante 2 h y recorre $90 \cdot 2 = 180$ km.

Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA)

Problemas 6–15. Para aceleración constante utilizaremos, según los datos disponibles,

$$v = v_0 + at, \quad \Delta x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2, \quad v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x.$$

► 20:56

Problema 6. Salida desde el reposo

Enunciado. Un automóvil parte del reposo y acelera uniformemente a 2 m/s^2 durante 8 segundos. Calcula la velocidad que alcanza y la distancia que recorre.

Resolución.

Como $v_0 = 0$,

$$v = v_0 + at = 0 + 2 \cdot 8 = 16 \text{ m/s},$$

$$\Delta x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 8^2 = 64 \text{ m}.$$

Respuesta: Alcanza 16 m/s y recorre 64 m .

► 24:23

Problema 7. Movimiento con velocidad inicial

Enunciado. Una motocicleta circula a 5 m/s y comienza a acelerar uniformemente a 3 m/s^2 . Calcula su velocidad y la distancia recorrida durante los siguientes 4 segundos.

Resolución.

$$v = 5 + 3 \cdot 4 = 17 \text{ m/s},$$

$$\Delta x = 5 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4^2 = 20 + 24 = 44 \text{ m}.$$

Respuesta: La velocidad final es 17 m/s y recorre 44 m .

► 28:56

Problema 8. Determinación de la aceleración y el tiempo

Enunciado. Un tren aumenta uniformemente su velocidad desde 6 m/s hasta 18 m/s mientras recorre 72 metros. Calcula la aceleración del tren y el tiempo empleado.

Resolución.

En MRUA, la velocidad media es la media aritmética de las velocidades inicial y final:

$$v_m = \frac{v_0 + v}{2} = \frac{6 + 18}{2} = 12 \text{ m/s}.$$

Por tanto,

$$t = \frac{\Delta x}{v_m} = \frac{72}{12} = 6 \text{ s}, \quad a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{18 - 6}{6} = 2 \text{ m/s}^2.$$

Respuesta: El tren acelera a 2 m/s^2 durante 6 s .

► 35:31

Problema 9. Velocidad final sin conocer el tiempo

Enunciado. Un ciclista lleva una velocidad inicial de 4 m/s y acelera uniformemente a 3 m/s² a lo largo de 40 metros. Calcula la velocidad que alcanza y el tiempo empleado.

Resolución.

Como inicialmente no conocemos el tiempo, aplicamos

$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x = 4^2 + 2 \cdot 3 \cdot 40 = 256.$$

Tomamos la raíz positiva porque el ciclista avanza en el sentido elegido como positivo:

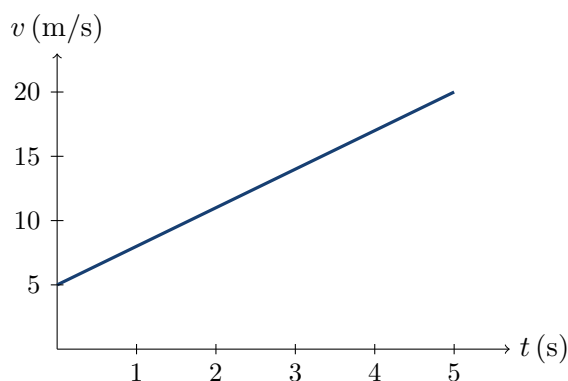
$$v = 16 \text{ m/s}, \quad t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{16 - 4}{3} = 4 \text{ s}.$$

Respuesta: Alcanza 16 m/s después de 4 s.

► 41:04

Problema 10. Interpretación de una gráfica velocidad-tiempo

Enunciado. La gráfica velocidad-tiempo de un automóvil muestra que su velocidad aumenta linealmente desde 5 m/s hasta 20 m/s durante 5 segundos. Calcula su aceleración y el desplazamiento realizado durante ese intervalo.



Resolución.

La aceleración es la pendiente de la gráfica:

$$a = \frac{20 - 5}{5} = 3 \text{ m/s}^2.$$

El desplazamiento es el área bajo la gráfica, equivalente a velocidad media por tiempo:

$$\Delta x = \frac{5 + 20}{2} \cdot 5 = 62,5 \text{ m}.$$

Respuesta: La aceleración es 3 m/s² y el desplazamiento, 62,5 m.

► 47:33

Problema 11. Frenado hasta detenerse

Enunciado. Un automóvil circula a 20 m/s y comienza a frenar con una aceleración constante de -4 m/s^2 . Calcula cuánto tarda en detenerse y la distancia que recorre durante el frenado.

Resolución.

En el instante de la detención, $v = 0$:

$$0 = 20 - 4t \implies t = 5 \text{ s.}$$

La distancia de frenado es

$$\Delta x = 20 \cdot 5 + \frac{1}{2}(-4)5^2 = 100 - 50 = 50 \text{ m.}$$

Respuesta: Tarda 5 s en detenerse y recorre 50 m.

► 52:15

Problema 12. Detención y cambio de sentido

Enunciado. Una partícula se mueve en sentido positivo con una velocidad inicial de 12 m/s y una aceleración constante de -3 m/s^2 . Calcula su velocidad final, su desplazamiento y la distancia total recorrida durante los primeros 6 segundos.

Resolución.

Al cabo de 6 s,

$$v = 12 - 3 \cdot 6 = -6 \text{ m/s}, \quad \Delta x = 12 \cdot 6 + \frac{1}{2}(-3)6^2 = 18 \text{ m.}$$

Para calcular la distancia debemos localizar el cambio de sentido:

$$0 = 12 - 3t \implies t = 4 \text{ s.}$$

Hasta detenerse avanza

$$d_1 = 12 \cdot 4 + \frac{1}{2}(-3)4^2 = 24 \text{ m.}$$

Durante los 2 s restantes retrocede

$$d_2 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2^2 = 6 \text{ m.}$$

Por tanto, la distancia total es $d = 24 + 6 = 30 \text{ m}$.

Respuesta: $v_f = -6 \text{ m/s}$, desplazamiento 18 m y distancia recorrida 30 m.

► 1:02:58

Problema 13. Tiempo de reacción y frenado

Enunciado. Un automóvil circula a 16 m/s cuando el conductor observa un árbol caído en la carretera, situado a 50 m de distancia. El conductor tarda 0,75 s en reaccionar y, a continuación, frena con una aceleración constante de -4 m/s^2 . Calcula la distancia recorrida durante el tiempo de reacción, la distancia de frenado y determina si evita el choque.

Resolución.

Reacción: el automóvil mantiene su velocidad durante 0,75 s.

$$d_{\text{reacción}} = 16 \cdot 0,75 = 12 \text{ m.}$$

Frenado: se detiene con aceleración constante de -4 m/s^2 .

$$0 = 16^2 + 2(-4)d_{\text{frenado}} \implies d_{\text{frenado}} = 32 \text{ m.}$$

$$d_{\text{total}} = 12 + 32 = 44 \text{ m}, \quad 50 - 44 = 6 \text{ m.}$$

Respuesta: Evita el choque y se detiene a 6 m del árbol.

► 1:09:00

Problema 14. Alcance entre MRU y MRUA

Enunciado. En el instante en que un coche pasa por un punto a una velocidad constante de 12 m/s, otro coche parte del reposo desde ese mismo punto y en la misma dirección con una aceleración constante de 3 m/s². Calcula cuánto tarda el segundo coche en alcanzar al primero y a qué distancia se produce el alcance.

Resolución.

Tomando como origen el punto de partida común,

$$x_1 = 12t, \quad x_2 = \frac{1}{2} \cdot 3t^2 = \frac{3}{2}t^2.$$

En el alcance, $x_1 = x_2$:

$$12t = \frac{3}{2}t^2 \quad \Rightarrow \quad t = 0 \text{ o } t = 8 \text{ s.}$$

La solución $t = 0$ es la coincidencia inicial. El alcance posterior ocurre en $t = 8$ s, en la posición

$$x = 12 \cdot 8 = 96 \text{ m.}$$

Respuesta: El segundo coche lo alcanza después de 8 s, a 96 m del origen.

Comprobación: $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 8^2 = 96 \text{ m.}$

► 1:14:44

Problema 15. Movimiento completo por etapas

Enunciado. Un automóvil parte del reposo y acelera a 2 m/s² durante 10 segundos. Después mantiene constante la velocidad alcanzada durante 15 segundos y finalmente frena a razón de 4 m/s² hasta detenerse. Calcula la duración total del movimiento y la distancia total recorrida.

Resolución.

Primera etapa: aceleración.

$$v_1 = 2 \cdot 10 = 20 \text{ m/s}, \quad d_1 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^2 = 100 \text{ m.}$$

Segunda etapa: velocidad constante.

$$d_2 = 20 \cdot 15 = 300 \text{ m.}$$

Tercera etapa: frenado.

$$0 = 20 - 4t_3 \quad \Rightarrow \quad t_3 = 5 \text{ s,}$$

$$d_3 = 20 \cdot 5 + \frac{1}{2}(-4)5^2 = 50 \text{ m.}$$

Finalmente,

$$t_{\text{total}} = 10 + 15 + 5 = 30 \text{ s,} \quad d_{\text{total}} = 100 + 300 + 50 = 450 \text{ m.}$$

Respuesta: El movimiento dura 30 s y el automóvil recorre 450 m.

Caída libre y lanzamiento vertical

Problemas 16–24. Tomaremos el eje vertical positivo hacia arriba, el suelo como $y = 0$ y $g = 10 \text{ m/s}^2$. Por tanto,

$$a = -g = -10 \text{ m/s}^2, \quad v = v_0 - gt, \quad y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Se desprecia el rozamiento con el aire.

► 1:24:28

Problema 16. Caída desde el reposo

Enunciado. Se deja caer una piedra desde una altura de 80 metros. Calcula el tiempo que tarda en llegar al suelo y la velocidad con la que impacta.

Resolución.

La piedra parte de $y_0 = 80 \text{ m}$ con $v_0 = 0$. Al llegar al suelo, $y = 0$:

$$0 = 80 - 5t^2 \implies t = 4 \text{ s.}$$

La velocidad de impacto es $v = -10t = -40 \text{ m/s}$.

Respuesta: Tarda 4 s y llega al suelo a 40 m/s hacia abajo.

► 1:29:32

Problema 17. Altura conocida a partir del tiempo

Enunciado. Un objeto se deja caer desde el reposo y tarda 3 segundos en llegar al suelo. Calcula la altura desde la que se soltó y su velocidad de impacto.

Resolución.

$$h = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 3^2 = 45 \text{ m}, \quad v = -gt = -30 \text{ m/s.}$$

Respuesta: Se soltó desde 45 m e impacta a 30 m/s hacia abajo.

► 1:31:55

Problema 18. Altura conocida a partir de la velocidad

Enunciado. Una piedra se deja caer desde el reposo y llega al suelo con una velocidad de 50 m/s. Calcula cuánto tiempo permanece en el aire y desde qué altura se dejó caer.

Resolución.

Trabajando con módulos,

$$t = \frac{|v|}{g} = 5 \text{ s}, \quad h = \frac{1}{2}gt^2 = 125 \text{ m.}$$

Respuesta: Permanece 5 s en el aire y se dejó caer desde 125 m.

► 1:35:23

Problema 19. Caída con velocidad inicial

Enunciado. Desde una altura de 40 metros se lanza una piedra verticalmente hacia abajo con una velocidad inicial de 10 m/s. Calcula el tiempo que tarda en llegar al suelo y la velocidad con la que impacta.

Resolución.

Como $v_0 = -10 \text{ m/s}$, al imponer $y = 0$:

$$0 = 40 - 10t - 5t^2 \implies t = 2 \text{ s.}$$

Entonces, $v = -10 - 10 \cdot 2 = -30$ m/s.

Respuesta: Tarda 2 s y llega al suelo a 30 m/s hacia abajo.

► 1:40:53

Problema 20. Lanzamiento vertical desde el suelo

Enunciado. Una pelota se lanza verticalmente hacia arriba desde el suelo con una velocidad inicial de 30 m/s. Calcula el tiempo de subida, la altura máxima y el tiempo total de vuelo.

Resolución.

En la altura máxima $v = 0$:

$$0 = 30 - 10t_{\text{subida}} \implies t_{\text{subida}} = 3 \text{ s},$$

$$h_{\text{máx}} = 30 \cdot 3 - 5 \cdot 3^2 = 45 \text{ m}.$$

Al imponer de nuevo $y = 0$, $0 = 30t - 5t^2$, de donde $t_{\text{total}} = 6$ s.

Respuesta: Tarda 3 s en subir, alcanza 45 m y permanece 6 s en el aire.

► 1:47:15

Problema 21. Velocidad necesaria para alcanzar cierta altura

Enunciado. ¿Con qué velocidad debe lanzarse verticalmente hacia arriba un objeto desde el suelo para que alcance una altura máxima de 15 m?

Resolución.

En la altura máxima $v = 0$. Aplicando $v^2 = v_0^2 - 2gh$:

$$0 = v_0^2 - 2 \cdot 10 \cdot 15 \implies v_0 = \sqrt{300} = 10\sqrt{3} \text{ m/s}.$$

Respuesta: Debe lanzarse con $v_0 = 10\sqrt{3}$ m/s $\approx 17,3$ m/s hacia arriba.

► 1:50:23

Problema 22. Lanzamiento hacia arriba desde una terraza

Enunciado. Desde una terraza situada a 15 metros del suelo se lanza verticalmente hacia arriba una pelota con una velocidad inicial de 10 m/s. Calcula la altura máxima, el tiempo hasta llegar al suelo y su velocidad de impacto.

Resolución.

La velocidad se anula al cabo de 1 s, por lo que

$$y_{\text{máx}} = 15 + 10 \cdot 1 - 5 \cdot 1^2 = 20 \text{ m}.$$

Para el impacto, $0 = 15 + 10t - 5t^2$, cuya raíz positiva es $t = 3$ s. Así, $v = 10 - 10 \cdot 3 = -20$ m/s.

Respuesta: Alcanza 20 m, tarda 3 s en caer e impacta a 20 m/s hacia abajo.

► 2:00:19

Problema 23. Paso por una altura determinada

Enunciado. Una pelota se lanza verticalmente hacia arriba desde el suelo con una velocidad inicial de 30 m/s. Determina cuándo se encuentra a 40 metros y la velocidad que lleva en cada instante.

Resolución.

$$40 = 30t - 5t^2 \implies t^2 - 6t + 8 = 0 \implies t_1 = 2 \text{ s}, t_2 = 4 \text{ s}.$$

$$v_1 = 30 - 10 \cdot 2 = 10 \text{ m/s}, \quad v_2 = 30 - 10 \cdot 4 = -10 \text{ m/s}.$$

Respuesta: Pasa por 40 m a los 2 s subiendo y a los 4 s bajando.

► 2:08:39

Problema 24. Encuentro entre dos objetos

Enunciado. Desde una altura de 60 metros se deja caer una piedra. Simultáneamente, desde el suelo y en la misma vertical, se lanza otra hacia arriba con una velocidad inicial de 30 m/s. Calcula cuándo y a qué altura se encuentran.

Resolución.

Sus posiciones son $y_1 = 60 - 5t^2$ e $y_2 = 30t - 5t^2$. Igualando:

$$60 - 5t^2 = 30t - 5t^2 \implies t = 2 \text{ s}, \quad y = 60 - 5 \cdot 2^2 = 40 \text{ m}.$$

Respuesta: Se encuentran 2 s después del lanzamiento, a 40 m sobre el suelo.

Problema del pájaro: movimiento unidimensional

Problema 25. Aplicación de movimiento uniforme y tiempo de encuentro.

► 2:17:14

Problema 25. El pájaro entre dos trenes

Enunciado. Dos trenes, separados inicialmente 300 km, se aproximan a 80 km/h y 70 km/h. Un pájaro vuela constantemente de uno a otro a 100 km/h hasta que los trenes se encuentran. ¿Qué distancia recorre?

Resolución.

Los trenes tardan

$$t = \frac{300}{80 + 70} = 2 \text{ h}$$

en encontrarse. El pájaro vuela durante todo ese tiempo.

Respuesta: Recorre $d = 100 \cdot 2 = 200 \text{ km}$.

Movimiento en dos dimensiones y composición

Problemas 26–33. En los lanzamientos se toma $g = 10 \text{ m/s}^2$ y se desprecia el rozamiento del aire. Las componentes perpendiculares del movimiento se estudian de forma independiente.

► 2:21:50

Problema 26. Lancha que atraviesa un río

Enunciado. Una lancha atraviesa un río de 50 m de anchura. La corriente hace que llegue 60 m aguas abajo del punto situado enfrente de la salida. ¿Qué distancia ha recorrido?

Resolución.

La trayectoria es la hipotenusa de un triángulo rectángulo:

$$d = \sqrt{50^2 + 60^2} = 10\sqrt{61} \text{ m}.$$

Respuesta: Ha recorrido aproximadamente 78,1 m.

► 2:25:09

Problema 27. Barca arrastrada por la corriente

Enunciado. Una barca avanza a 8 km/h respecto del agua y apunta perpendicularmente a la orilla de un río de 100 m de anchura. La corriente fluye a 6 km/h. Calcula el tiempo de cruce y el arrastre aguas abajo.

Resolución.

Como 100 m = 0,1 km,

$$t = \frac{0,1}{8} = 0,0125 \text{ h} = 45 \text{ s}, \quad d = 6 \cdot 0,0125 = 0,075 \text{ km}.$$

Respuesta: Tarda 45 s y la corriente la arrastra 75 m.

► 2:29:37

Problema 28. Lanzamiento horizontal desde un avión

Enunciado. Un avión vuela horizontalmente a 3000 m de altura con una velocidad constante de 100 m/s. ¿A qué distancia horizontal del blanco debe soltar una bomba para que impacte sobre él?

Resolución.

El tiempo de caída cumple

$$3000 = 5t^2 \implies t = 10\sqrt{6} \text{ s}.$$

El avance horizontal es

$$x = v_x t = 1000\sqrt{6} \text{ m}.$$

Respuesta: Debe soltarla $1000\sqrt{6} \text{ m} \approx 2,45 \text{ km}$ antes del blanco.

► 2:33:51

Problema 29. Canica que cae desde una mesa

Enunciado. Una canica rueda sobre una mesa horizontal de 1,5 m de altura y cae al suelo a 2,5 m de la vertical del borde. ¿Con qué rapidez rodaba sobre la mesa?

Resolución.

$$1,5 = 5t^2 \implies t = \sqrt{0,3} \text{ s}, \quad v_0 = \frac{2,5}{\sqrt{0,3}}.$$

Respuesta: La canica rodaba a $v_0 \approx 4,56 \text{ m/s}$.

► 2:37:45

Problema 30. Posición de un proyectil

Enunciado. Se dispara un proyectil desde el suelo con rapidez inicial de 500 m/s y un ángulo de 30° . Determina sus coordenadas 3 s después del disparo.

Resolución.

$$v_{0x} = 500 \cos 30^\circ = 250\sqrt{3}, \quad v_{0y} = 500 \sin 30^\circ = 250.$$

$$x(3) = 250\sqrt{3} \cdot 3 = 750\sqrt{3} \text{ m}, \quad y(3) = 250 \cdot 3 - 5 \cdot 3^2 = 705 \text{ m}.$$

Respuesta: $(x, y) = (750\sqrt{3}, 705) \text{ m} \approx (1299, 705) \text{ m}$.

► 2:43:45

Problema 31. Altura máxima y alcance horizontal

Enunciado. Se dispara un proyectil desde el suelo con rapidez inicial de 150 m/s y un ángulo de 30° . Calcula la altura máxima y el alcance horizontal.

Resolución.

$v_{0x} = 75\sqrt{3}$ m/s y $v_{0y} = 75$ m/s. Entonces,

$$h_{\text{máx}} = \frac{v_{0y}^2}{2g} = 281,25 \text{ m}, \quad t_{\text{vuelo}} = \frac{2v_{0y}}{g} = 15 \text{ s},$$

$$R = v_{0x}t_{\text{vuelo}} = 1125\sqrt{3} \text{ m}.$$

Respuesta: $h_{\text{máx}} = 281,25$ m y $R \approx 1948,6$ m.

► 2:53:58

Problema 32. Rapidez inicial de un balón

Enunciado. Un futbolista chuta un balón formando 20° con la horizontal. El balón vuelve al suelo a 40 m del punto de lanzamiento. Calcula su rapidez inicial.

Resolución.

Como las alturas inicial y final coinciden,

$$R = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g} \implies v_0 = \sqrt{\frac{40 \cdot 10}{\sin 40^\circ}}.$$

Respuesta: $v_0 \approx 24,9$ m/s.

► 2:58:40

Problema 33. Dos ángulos para un mismo alcance

Enunciado. Se dispara un proyectil desde el suelo con rapidez inicial de 200 m/s. ¿Con qué ángulos puede alcanzar un blanco situado a 2500 m, a la misma altura que el lanzamiento?

Resolución.

$$2500 = \frac{200^2 \sin(2\theta)}{10} \implies \sin(2\theta) = \frac{5}{8}.$$

Por tanto, $2\theta = 38,68^\circ$ o $2\theta = 141,32^\circ$.

Respuesta: $\theta_1 \approx 19,3^\circ$ o $\theta_2 \approx 70,7^\circ$.

Movimiento circular

Problemas 34–44. Usaremos $s = r\theta$, $v = \omega r$, $a_n = v^2/r = \omega^2 r$ y $a_t = \alpha r$. Los ángulos empleados en estas expresiones se miden en radianes.

► 3:06:40

Problema 34. Longitud de un arco

Enunciado. Una partícula describe un arco de circunferencia de radio 2,50 m. Si recorre un ángulo de 120° , determina la longitud del arco.

Resolución.

$120^\circ = 2\pi/3$ rad, luego

$$s = r\theta = 2,50 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} \text{ m}.$$

Respuesta: $s \approx 5,24$ m.

► 3:09:10

Problema 35. Rapidez lineal de un punto de una rueda

Enunciado. Una rueda de bicicleta de radio 0,45 m gira con velocidad angular constante de 16 rad/s. Calcula la rapidez lineal de un punto de su borde.

Resolución.

$$v = \omega r = 16 \cdot 0,45.$$

Respuesta: $v = 7,2$ m/s.

► 3:11:25

Problema 36. Velocidad angular y periodo de un ventilador

Enunciado. Un ventilador gira uniformemente a 750 rpm. Calcula su velocidad angular en radianes por segundo y el periodo de cada revolución.

Resolución.

$$\omega = 750 \frac{\text{rev}}{\text{min}} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{\text{rev}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 25\pi \text{ rad/s}, \quad T = \frac{60}{750} = 0,08 \text{ s}.$$

Respuesta: $\omega = 25\pi$ rad/s $\approx 78,54$ rad/s y $T = 0,08$ s.

► 3:15:54

Problema 37. Movimiento de una noria

Enunciado. Una noria de 18 m de radio gira con velocidad angular $\omega = \pi/6$ rad/s. Calcula en un minuto la distancia recorrida por un punto de la periferia y el número de vueltas; calcula también el periodo y la frecuencia.

Resolución.

En 60 s, $\theta = \omega t = 10\pi$ rad, es decir, $N = \theta/(2\pi) = 5$ vueltas.

$$s = r\theta = 180\pi \text{ m}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 12 \text{ s}, \quad f = \frac{1}{T} = \frac{1}{12} \text{ Hz}.$$

Respuesta: $s \approx 565,5$ m, $N = 5$, $T = 12$ s y $f \approx 0,0833$ Hz.

► 3:22:26

Problema 38. Dos ruedas unidas por una cadena

Enunciado. Dos ruedas están unidas por una cadena que no desliza. La primera tiene radio 15 cm y completa 80 revoluciones; la segunda tiene radio 24 cm. ¿Cuántas revoluciones completa la segunda?

Resolución.

La longitud recorrida por la cadena es igual en ambas:

$$N_1(2\pi r_1) = N_2(2\pi r_2) \implies N_2 = 80 \frac{15}{24}.$$

Respuesta: La segunda rueda completa 50 revoluciones.

► 3:26:46

Problema 39. Aceleración normal de un automóvil

Enunciado. Un automóvil toma una curva circular de 100 m de radio con rapidez constante de 7 m/s. Calcula el módulo de su aceleración normal.

Resolución.

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{7^2}{100}.$$

Respuesta: $a_n = 0,49 \text{ m/s}^2$, dirigida hacia el centro de la curva.

► 3:28:58

Problema 40. Movimiento de un punto de la superficie terrestre

Enunciado. Considera la Tierra esférica, con radio 6370 km y periodo de rotación de 24 h. Calcula la rapidez lineal y la aceleración normal de un punto situado a 45° de latitud.

Resolución.

El radio de la trayectoria es $r = R \cos 45^\circ$, con $R = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$ y $T = 86400 \text{ s}$.

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad v = \omega R \cos 45^\circ, \quad a_n = \omega^2 R \cos 45^\circ.$$

Respuesta: $v \approx 327,6 \text{ m/s}$ y $a_n \approx 0,0238 \text{ m/s}^2$.

► 3:36:43

Problema 41. Aceleración tangencial en un disco

Enunciado. Un disco de radio 0,30 m gira con aceleración angular constante de $8,0 \text{ rad/s}^2$. Calcula la aceleración tangencial de un punto de su borde.

Resolución.

$$a_t = \alpha r = 8,0 \cdot 0,30.$$

Respuesta: $a_t = 2,4 \text{ m/s}^2$.

► 3:39:01

Problema 42. Disco con aceleración angular constante

Enunciado. Un disco parte del reposo y gira con aceleración angular constante de $3,0 \text{ rad/s}^2$. Calcula su velocidad angular después de 8,0 s y las revoluciones completadas.

Resolución.

$$\omega = \alpha t = 24 \text{ rad/s}, \quad \Delta\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 = 96 \text{ rad}.$$

$$N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{48}{\pi}.$$

Respuesta: $\omega = 24 \text{ rad/s}$ y $N \approx 15,28$ revoluciones.

► 3:44:53

Problema 43. Disco que desacelera hasta detenerse

Enunciado. Un disco gira inicialmente a 30 rad/s y desacelera uniformemente con $\alpha = -3,0 \text{ rad/s}^2$. Calcula el tiempo que tarda en detenerse y las revoluciones completadas.

Resolución.

$$\begin{aligned} 0 &= 30 - 3t \implies t = 10 \text{ s}, \\ 0 &= 30^2 + 2(-3)\Delta\theta \implies \Delta\theta = 150 \text{ rad}. \\ N &= \frac{150}{2\pi} = \frac{75}{\pi}. \end{aligned}$$

Respuesta: Tarda 10 s y completa aproximadamente 23,87 revoluciones.

► 3:51:00

Problema 44. Puesta en marcha de un tocadiscos

Enunciado. El plato de un tocadiscos parte del reposo y alcanza 60 rpm después de completar 5 revoluciones. Suponiendo constante la aceleración angular, calcula su valor.

Resolución.

$\omega_f = 2\pi \text{ rad/s}$ y $\Delta\theta = 10\pi \text{ rad}$. Entonces,

$$(2\pi)^2 = 2\alpha(10\pi).$$

Respuesta: $\alpha = \pi/5 \text{ rad/s}^2 \approx 0,628 \text{ rad/s}^2$.

Cinemática mediante derivadas e integrales

Problemas 45–50. En movimiento rectilíneo, $v = dx/dt$ y $a = dv/dt$. En movimiento circular, $\omega = d\theta/dt$ y $\alpha = d\omega/dt$. La integración permite recorrer estas relaciones en sentido contrario.

► 3:55:52

Problema 45. De la posición a la velocidad y la aceleración

Enunciado. La posición de una partícula es $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t + 2$, con x en metros y t en segundos. Determina $v(t)$ y $a(t)$ y calcula sus valores en $t = 2 \text{ s}$.

Resolución.

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 12t + 9, & a(t) &= \frac{dv}{dt} = 6t - 12. \\ v(2) &= -3 \text{ m/s}, & a(2) &= 0. \end{aligned}$$

Respuesta: $v(t) = 3t^2 - 12t + 9$, $a(t) = 6t - 12$; en $t = 2 \text{ s}$, $v = -3 \text{ m/s}$ y $a = 0$.

► 3:59:35

Problema 46. De la velocidad a la posición

Enunciado. Una partícula se mueve con $v(t) = 6t - 4 \text{ m/s}$. Sabiendo que $x(0) = 3 \text{ m}$, determina $x(t)$ y su posición en $t = 4 \text{ s}$.

Resolución.

$$x(t) = \int (6t - 4) dt = 3t^2 - 4t + C.$$

Como $x(0) = 3$, $C = 3$.

Respuesta: $x(t) = 3t^2 - 4t + 3$ y $x(4) = 35$ m.

► 4:04:07

Problema 47. De la aceleración a la posición

Enunciado. La aceleración de una partícula es $a(t) = 6t - 4$ m/s². Si $v(0) = 2$ m/s y $x(0) = 1$ m, determina $v(t)$, $x(t)$ y la posición en $t = 3$ s.

Resolución.

$$v(t) = \int (6t - 4) dt = 3t^2 - 4t + C_1 = 3t^2 - 4t + 2.$$

$$x(t) = \int (3t^2 - 4t + 2) dt = t^3 - 2t^2 + 2t + C_2 = t^3 - 2t^2 + 2t + 1.$$

Respuesta: $v(t) = 3t^2 - 4t + 2$, $x(t) = t^3 - 2t^2 + 2t + 1$ y $x(3) = 16$ m.

► 4:10:19

Problema 48. De la velocidad angular a la posición angular

Enunciado. La velocidad angular de una rueda es $\omega(t) = 2t + 1$ rad/s. Sabiendo que $\theta(0) = \pi/6$ rad, determina $\theta(t)$ y la posición angular en $t = 3$ s.

Resolución.

$$\theta(t) = \int (2t + 1) dt = t^2 + t + C.$$

Como $\theta(0) = \pi/6$, se obtiene $C = \pi/6$.

Respuesta: $\theta(t) = t^2 + t + \pi/6$ y $\theta(3) = 12 + \pi/6$ rad $\approx 12,52$ rad.

► 4:13:37

Problema 49. De la aceleración angular al movimiento completo

Enunciado. La aceleración angular de un disco es $\alpha(t) = 6t$ rad/s². En $t = 0$, $\omega_0 = 2$ rad/s y $\theta_0 = 0$. Determina $\omega(t)$, $\theta(t)$ y sus valores en $t = 2$ s.

Resolución.

$$\omega(t) = \int 6t dt = 3t^2 + C_1 = 3t^2 + 2,$$

$$\theta(t) = \int (3t^2 + 2) dt = t^3 + 2t + C_2 = t^3 + 2t.$$

Respuesta: $\omega(t) = 3t^2 + 2$, $\theta(t) = t^3 + 2t$; en $t = 2$ s, $\omega = 14$ rad/s y $\theta = 12$ rad.

► 4:19:23

Problema 50. Derivadas en el movimiento circular

Enunciado. La posición angular de un punto del borde de un disco es $\theta(t) = t^3 - 3t^2 + 4t$. El radio es 0,50 m. En $t = 2$ s, calcula ω , α , la rapidez lineal y las aceleraciones tangencial y normal.

Resolución.

$$\omega(t) = 3t^2 - 6t + 4, \quad \alpha(t) = 6t - 6.$$

En $t = 2$ s, $\omega = 4$ rad/s y $\alpha = 6$ rad/s². Por tanto,

$$v = \omega r = 2 \text{ m/s}, \quad a_t = \alpha r = 3 \text{ m/s}^2, \quad a_n = \omega^2 r = 8 \text{ m/s}^2.$$

Respuesta: $\omega = 4$ rad/s, $\alpha = 6$ rad/s², $v = 2$ m/s, $a_t = 3$ m/s² y $a_n = 8$ m/s².