

50

ECUACIONES DIFERENCIALES

DESDE CERO

Colección progresiva de 50 ejercicios resueltos

De la integración directa a la variación de constantes

[VER LA CLASE COMPLETA EN YOUTUBE](#)

Contenidos cubiertos

Integración directa · Variables separables · Crecimiento y decrecimiento exponencial · Ecuación logística · Ecuaciones homogéneas de primer orden · Ecuaciones exactas · Factores integrantes · Ecuaciones lineales de primer orden · Ley de enfriamiento de Newton · Caída con resistencia del aire · Ecuaciones de Bernoulli · Ecuaciones lineales homogéneas de orden 2, 3 y 4 · Movimiento armónico simple · Péndulo · Circuito LC · Ecuaciones no homogéneas · Coeficientes indeterminados · Oscilación forzada · Variación de constantes

Índice

Cómo utilizar esta colección	2
1. Primer contacto y separación de variables	4
2. Modelos exponenciales y ecuaciones separables	6
3. Ecuaciones homogéneas de primer orden	9
4. Ecuaciones exactas	11
5. Factores integrantes para obtener ecuaciones exactas	13
6. Ecuaciones lineales de primer orden y aplicaciones	14
7. Ecuaciones de Bernoulli	17
8. Ecuaciones lineales homogéneas de orden superior	18
9. Aplicaciones físicas de ecuaciones homogéneas	21
10. Ecuaciones no homogéneas y variación de constantes	22
Resumen final de métodos	26

Cómo utilizar esta colección

Esta reconstrucción sigue el orden real de la clase: comienza con ecuaciones que se resuelven por integración directa, continúa con separación de variables y ecuaciones de primer orden, y termina con ecuaciones lineales de orden superior, aplicaciones físicas y variación de constantes.

Idea clave

Antes de resolver cada ejercicio conviene identificar la estructura de la ecuación, elegir el método adecuado y comprobar, siempre que sea razonable, que la solución obtenida satisface la ecuación diferencial original.

Mapa de cobertura

Ejercicios	Contenido	Nivel aproximado
1–6	Integración directa y primeras separables	Muy básico–básico
7–15	Exponenciales, logística, separables y aplicaciones	Básico–medio
16–18	Ecuaciones homogéneas de primer orden	Medio
19–24	Ecuaciones exactas	Medio
25–26	Factores integrantes para convertir en exactas	Medio
27–32	Lineales de primer orden y aplicaciones	Medio
33–35	Ecuaciones de Bernoulli	Medio–alto
36–42	Ecuaciones lineales homogéneas de orden superior	Medio–alto
43–45	Aplicaciones físicas: muelle, péndulo y circuito LC	Alto
46–50	No homogéneas, oscilación forzada y variación de constantes	Alto

Índice de los 50 ejercicios y tiempos del vídeo

Los tiempos en color naranja son enlaces: al pulsarlos se abre el vídeo exactamente en el comienzo de cada ejercicio.

#	Tiempo	Contenido
1	00:58	Integración directa: $y' = 4$
2	02:21	Integración directa: $y' = 2x$
3	03:47	Condición inicial y trigonometría
4	05:56	Separación de variables
5	09:12	Separación con $\sqrt{x}$
6	13:05	Problema de valor inicial
7	15:38	Crecimiento/decrecimiento exponencial
8	19:18	Separable con $1 + x^2$
9	23:17	Razón de cambio proporcional
10	32:10	Decaimiento radiactivo
11	37:27	Solución implícita
12	39:38	Exponencial separable
13	42:32	Ecuación logística
14	54:41	Separable trasladada
15	59:05	Vaciado de un depósito
16	1:05:00	Homogénea de primer orden
17	1:12:50	Homogénea de primer orden
18	1:17:36	Homogénea en forma diferencial
19	1:25:51	Ecuación exacta
20	1:33:33	Ecuación exacta
21	1:36:39	Exacta con exponencial y trigonometría
22	1:42:08	Ecuación exacta
23	1:45:58	Exacta trigonométrica
24	1:50:36	Exacta con condición inicial
25	1:55:26	Factor integrante $\mu(x) = e^x$
26	2:03:56	Factor integrante $\mu(x) = 1/x$
27	2:10:33	Lineal de primer orden
28	2:14:19	Lineal con coeficientes variables
29	2:18:40	Lineal con exponencial
30	2:21:40	Lineal con tangente
31	2:27:06	Ley de enfriamiento de Newton
32	2:40:11	Caída con resistencia del aire
33	2:46:18	Bernoulli
34	2:52:21	Bernoulli con $n = -1$
35	2:59:21	Bernoulli con $n = 2$
36	3:05:45	Segundo orden: raíces reales distintas
37	3:07:48	Segundo orden: raíz doble
38	3:10:15	Segundo orden: raíces complejas
39	3:14:12	Segundo orden con condiciones iniciales
40	3:20:01	Ecuación lineal de tercer orden
41	3:22:41	Raíz triple
42	3:24:57	Ecuación lineal de cuarto orden
43	3:27:59	Masa unida a un muelle
44	3:36:13	Péndulo para pequeñas oscilaciones
45	3:41:19	Circuito LC
46	3:46:02	Segundo orden no homogénea
47	3:49:26	Forzamiento polinómico
48	3:52:13	Forzamiento sinusoidal
49	3:56:31	Oscilación forzada sin amortiguamiento
50	4:06:59	Variación de constantes

Primer contacto y separación de variables

► Ver este bloque en el vídeo (00:58)

Comenzamos con ecuaciones muy sencillas para fijar la notación y el paso de derivadas a diferenciales. La dificultad aumenta poco a poco mediante separación de variables y condiciones iniciales.

Ejercicio 1. Integración directa

Vídeo: 00:58

Tipo: Integración directa

Resuelve

$$y' = 4.$$

Solución.

Escribimos $dy = 4 dx$ e integramos:

$$y = \int 4 dx = 4x + C.$$

Resultado: $y = 4x + C$

Ejercicio 2. Integración directa

Vídeo: 02:21

Tipo: Integración directa

Resuelve

$$y' = 2x.$$

Solución.

Integramos directamente:

$$y = \int 2x dx = x^2 + C.$$

Resultado: $y = x^2 + C$

Ejercicio 3. Condición inicial y trigonometría

Vídeo: 03:47

Tipo: Integración directa con condición inicial

Resuelve

$$y' = \cos x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2.$$

Solución.

Integramos:

$$y = \sin x + C.$$

La condición inicial da

$$2 = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + C = 1 + C,$$

por lo que $C = 1$.

Resultado: $y = \sin x + 1$

Ejercicio 4. Separación de variables**Vídeo:** 05:56**Tipo:** Variables separables

Resuelve

$$y' = \frac{5x}{y}.$$

Solución.

Separamos variables:

$$y \, dy = 5x \, dx.$$

Integramos:

$$\frac{y^2}{2} = \frac{5x^2}{2} + C.$$

Absorbiendo constantes,

$$y^2 = 5x^2 + K.$$

Resultado: $y = \pm \sqrt{5x^2 + K}$

Ejercicio 5. Separación con una raíz**Vídeo:** 09:12**Tipo:** Variables separables

Resuelve

$$y \, y' = \sqrt{x}.$$

Solución.

Escribimos

$$y \, dy = x^{1/2} \, dx.$$

Entonces

$$\frac{y^2}{2} = \frac{2}{3} x^{3/2} + C,$$

y, absorbiendo la constante al multiplicar por 2,

$$y^2 = \frac{4}{3} x^{3/2} + K.$$

Resultado: $y = \pm \sqrt{\frac{4}{3} x^{3/2} + K}$

Ejercicio 6. Problema de valor inicial**Vídeo:** 13:05**Tipo:** Integración directa con condición inicial

Resuelve

$$y' = x - 6, \quad y(0) = -3.$$

Solución.

Integramos:

$$y = \frac{x^2}{2} - 6x + C.$$

Como $y(0) = -3$, resulta $C = -3$.

Resultado: $y = \frac{x^2}{2} - 6x - 3$

Modelos exponenciales y ecuaciones separables

► Ver este bloque en el vídeo (15:38)

Aparecen ahora la ley $y' = ky$, aplicaciones de crecimiento o decrecimiento, la ecuación logística y varios problemas separables.

Ejercicio 7. Crecimiento o decrecimiento exponencial

Vídeo: 15:38

Tipo: Variables separables

Resuelve, suponiendo $y > 0$,

$$y' = ky.$$

Solución.

Separamos e integramos:

$$\frac{dy}{y} = k dx, \quad \ln y = kx + C.$$

Exponentiando,

$$y = e^{kx+C} = C_1 e^{kx}.$$

Resultado: $y = C_1 e^{kx}$

Ejercicio 8. Separable con $1 + x^2$

Vídeo: 19:18

Tipo: Variables separables

Resuelve

$$(1 + x^2)y' - 2xy = 0.$$

Solución.

Reordenamos y separamos:

$$\frac{dy}{y} = \frac{2x}{1 + x^2} dx.$$

Integrando,

$$\ln |y| = \ln(1 + x^2) + C.$$

Por tanto, absorbiendo el factor constante,

$$y = C(1 + x^2).$$

Resultado: $y = C(1 + x^2)$

Ejercicio 9. Razón de cambio proporcional

Vídeo: 23:17

Tipo: Modelo exponencial con dos datos

La razón de cambio de y es proporcional a y . Además,

$$y(0) = 2, \quad y(2) = 4.$$

Calcula $y(3)$.

Solución.

El modelo es

$$y = Ce^{kt}.$$

De $y(0) = 2$ resulta $C = 2$. Después,

$$4 = 2e^{2k} \implies k = \frac{\ln 2}{2}.$$

Así,

$$y(t) = 2e^{(\ln 2)t/2}.$$

Para $t = 3$,

$$y(3) = 2e^{3 \ln 2/2} = 2^{5/2} = 4\sqrt{2} \approx 5,657.$$

Resultado: $y(3) \approx 5,657$

Ejercicio 10. Decaimiento radiactivo

Vídeo: 32:10

Tipo: Aplicación de crecimiento/decrecimiento

La cantidad $A(t)$ de una sustancia radiactiva satisface

$$\frac{dA}{dt} = -0,2A, \quad A(0) = 80 \text{ mg},$$

con t medido en días. ¿Cuánto queda tras 5 días?

Solución.

La solución del modelo es

$$A(t) = Ce^{-0,2t}.$$

Como $A(0) = 80$, tenemos $C = 80$. Por tanto,

$$A(5) = 80e^{-1} \approx 29,43 \text{ mg}.$$

Resultado: $A(t) = 80e^{-0,2t}$, $A(5) \approx 29,43 \text{ mg}$

Ejercicio 11. Solución implícita

Vídeo: 37:27

Tipo: Variables separables

Resuelve

$$y' = \frac{1+x^2}{1+y^2}, \quad y(0) = 0.$$

Solución.

Separamos e integramos:

$$(1+y^2) dy = (1+x^2) dx,$$

$$y + \frac{y^3}{3} = x + \frac{x^3}{3} + C.$$

La condición inicial da $C = 0$.

Resultado: $y + \frac{y^3}{3} = x + \frac{x^3}{3}$

Ejercicio 12. Exponencial separable

Vídeo: 39:38

Tipo: Variables separables

Resuelve

$$y' = e^{x-y}, \quad y(0) = 0.$$

Solución.

Como $e^{x-y} = e^x e^{-y}$,

$$e^y dy = e^x dx.$$

Integrando,

$$e^y = e^x + C.$$

La condición inicial da $C = 0$, por lo que $e^y = e^x$.

Resultado: $y = x$

Ejercicio 13. Ecuación logística

Vídeo: 42:32

Tipo: Logística separable

Resuelve

$$y' = y(1 - y), \quad y(0) = \frac{1}{2}.$$

Solución.

Separamos:

$$\frac{dy}{y(1-y)} = dx, \quad \frac{1}{y(1-y)} = \frac{1}{y} + \frac{1}{1-y}.$$

Integrando,

$$\ln \left| \frac{y}{1-y} \right| = x + C.$$

La condición inicial conduce a

$$\frac{y}{1-y} = e^x.$$

Despejando y obtenemos la forma logística.

Resultado: $y = \frac{1}{1 + e^{-x}}$

Ejercicio 14. Separar después de trasladar

Vídeo: 54:41

Tipo: Variables separables

Resuelve

$$y' = (x+1)(y-2), \quad y(0) = 3.$$

Solución.

Separamos e integramos:

$$\frac{dy}{y-2} = (x+1) dx,$$

$$\ln |y - 2| = \frac{x^2}{2} + x + C.$$

Así,

$$y - 2 = C_1 e^{x^2/2+x}.$$

Como $y(0) = 3$, $C_1 = 1$.

Resultado: $y = 2 + e^{x^2/2+x}$

Ejercicio 15. Vaciado de un depósito

Vídeo: 59:05

Tipo: Aplicación separable

La altura $h(t)$, en metros, satisface

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{1}{3}\sqrt{h}, \quad h(0) = 9,$$

con t en minutos. Halla $h(t)$ y el tiempo que tarda en vaciarse el depósito.

Solución.

Separamos:

$$\frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{1}{3} dt.$$

Integramos:

$$2\sqrt{h} = -\frac{t}{3} + C.$$

Como $h(0) = 9$, $C = 6$, y por tanto

$$\sqrt{h} = 3 - \frac{t}{6}.$$

Así,

$$h(t) = \left(3 - \frac{t}{6}\right)^2.$$

El depósito se vacía cuando $h = 0$, es decir, para $t = 18$.

Resultado: $h(t) = \left(3 - \frac{t}{6}\right)^2, \quad 0 \leq t \leq 18, \quad t = 18 \text{ min}$

Ecuaciones homogéneas de primer orden

► [Ver este bloque en el vídeo \(1:05:00\)](#)

En estos ejercicios se utiliza el cambio $y = vx$, de modo que $y' = v + xv'$, para transformar la ecuación en una separable.

Ejercicio 16. Homogénea elemental

Vídeo: 1:05:00

Tipo: Homogénea de primer orden

Resuelve, para $x > 0$,

$$y' = \frac{x + y}{2x}.$$

Solución.

Tomamos $y = vx$, de modo que $y' = v + xv'$. Entonces

$$v + xv' = \frac{1+v}{2},$$

por lo que

$$2xv' = 1 - v.$$

Separamos:

$$\frac{dv}{1-v} = \frac{dx}{2x}.$$

Al integrar y deshacer el cambio se obtiene

Resultado: $y = x + C\sqrt{x}$

Ejercicio 17. Otra homogénea

Vídeo: 1:12:50

Tipo: Homogénea de primer orden

Resuelve, para $x \neq 0$,

$$y' = \frac{2x + 3y}{x}.$$

Solución.

Con $y = vx$,

$$v + xv' = 2 + 3v,$$

de donde

$$xv' = 2(1 + v).$$

Separamos e integramos:

$$\frac{dv}{1+v} = 2\frac{dx}{x}, \quad \ln|1+v| = \ln(x^2) + C.$$

Absorbiendo constantes,

$$1 + v = Cx^2.$$

Como $v = y/x$, resulta

Resultado: $y = Cx^3 - x$

Ejercicio 18. Homogénea en forma diferencial

Vídeo: 1:17:36

Tipo: Homogénea de primer orden en forma diferencial

Resuelve

$$(x^2 - y^2) dx + xy dy = 0.$$

Solución.

Tomamos $y = vx$, $dy = v dx + x dv$. Sustituyendo,

$$x^2(1 - v^2) dx + x^2v(v dx + x dv) = 0,$$

y se simplifica a

$$x^2 dx + x^3 v dv = 0.$$

Dividiendo entre x^3 ,

$$\frac{dx}{x} = -v dv.$$

Por tanto,

$$\ln |x| = -\frac{v^2}{2} + C,$$

y, deshaciendo $v = y/x$,

$$\ln(x^2) + \frac{y^2}{x^2} = C.$$

Resultado: $\ln(x^2) + \frac{y^2}{x^2} = C$, equivalentemente $x^2 e^{y^2/x^2} = C_1$

Ecuaciones exactas

► [Ver este bloque en el vídeo \(1:25:51\)](#)

Para $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$, comprobamos $M_y = N_x$ y buscamos una función potencial F tal que $F_x = M$ y $F_y = N$.

Ejercicio 19. Primera ecuación exacta

Vídeo: 1:25:51

Tipo: Ecuación exacta

Resuelve

$$(2xy - 3x^2) dx + (x^2 - 2y) dy = 0.$$

Solución.

Aquí

$$M = 2xy - 3x^2, \quad N = x^2 - 2y,$$

y $M_y = 2x = N_x$. Integramos M respecto de x :

$$F = x^2 y - x^3 + g(y).$$

Como

$$F_y = x^2 + g'(y) = x^2 - 2y,$$

se tiene $g'(y) = -2y$ y $g(y) = -y^2$.

Resultado: $x^2 y - x^3 - y^2 = C$

Ejercicio 20. Exacta con exponencial

Vídeo: 1:33:33

Tipo: Ecuación exacta

Resuelve

$$ye^x dx + e^x dy = 0.$$

Solución.

Es exacta porque

$$M_y = e^x = N_x.$$

Integrando $M = ye^x$ respecto de x ,

$$F = ye^x + g(y).$$

La condición $F_y = e^x$ obliga a $g'(y) = 0$.

Resultado: $ye^x = C$

Ejercicio 21. Exponencial y trigonometría

Vídeo: 1:36:39

Tipo: Ecuación exacta

Resuelve

$$(e^x \cos y + 2x) dx + (-e^x \sin y + 2y) dy = 0.$$

Solución.

Se verifica

$$M_y = -e^x \sin y = N_x.$$

Integramos M respecto de x :

$$F = e^x \cos y + x^2 + g(y).$$

Después,

$$F_y = -e^x \sin y + g'(y) = -e^x \sin y + 2y,$$

por lo que $g(y) = y^2$.

Resultado: $e^x \cos y + x^2 + y^2 = C$

Ejercicio 22. Exacta muy directa

Vídeo: 1:42:08

Tipo: Ecuación exacta

Resuelve

$$2xy dx + x^2 dy = 0.$$

Solución.

Como $M_y = 2x = N_x$, es exacta. Integramos

$$F = \int 2xy dx = x^2 y + g(y).$$

Entonces $F_y = x^2 + g'(y) = x^2$, de modo que $g'(y) = 0$.

Resultado: $x^2 y = C$

Ejercicio 23. Exacta trigonométrica

Vídeo: 1:45:58

Tipo: Ecuación exacta

Resuelve

$$(y \cos x + 2x) dx + (\sin x + 2y) dy = 0.$$

Solución.

Se tiene $M_y = \cos x = N_x$. Integramos:

$$F = y \sin x + x^2 + g(y).$$

Como

$$F_y = \sin x + g'(y) = \sin x + 2y,$$

resulta $g(y) = y^2$.

Resultado: $y \sin x + x^2 + y^2 = C$

Ejercicio 24. Exacta con condición inicial

Vídeo: 1:50:36

Tipo: Ecuación exacta con dato inicial

Resuelve

$$(2x + y) dx + (x + 3y^2) dy = 0, \quad y(1) = 0.$$

Solución.

La ecuación es exacta. Una función potencial es

$$F = x^2 + xy + y^3.$$

Por tanto,

$$x^2 + xy + y^3 = C.$$

La condición $(1, 0)$ da $C = 1$.

Resultado: $x^2 + xy + y^3 = 1$

Factores integrantes para obtener ecuaciones exactas

► Ver este bloque en el vídeo (1:55:26)

Estas ecuaciones no son exactas inicialmente. Se busca un factor integrante que dependa de una sola variable y , después de multiplicar, se resuelve la ecuación exacta resultante.

Ejercicio 25. Factor integrante e^x

Vídeo: 1:55:26

Tipo: Factor integrante para exactitud

Resuelve

$$(y^2 - x) dx + 2y dy = 0.$$

Solución.

Con $M = y^2 - x$ y $N = 2y$,

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{2y}{2y} = 1.$$

Por tanto,

$$\mu(x) = e^{\int 1 dx} = e^x.$$

Multiplicando por e^x :

$$e^x(y^2 - x) dx + 2ye^x dy = 0,$$

que ya es exacta. Una función potencial es

$$F = e^x(y^2 - x + 1).$$

Resultado: $e^x(y^2 - x + 1) = C$

Ejercicio 26. Factor integrante $1/x$

Vídeo: 2:03:56

Tipo: Factor integrante para exactitud

Resuelve, para $x > 0$,

$$(2x^2y - 1) dx + x^3 dy = 0.$$

Solución.

Aquí

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{2x^2 - 3x^2}{x^3} = -\frac{1}{x}.$$

Entonces

$$\mu(x) = e^{\int -1/x dx} = \frac{1}{x}.$$

La ecuación transformada es

$$\left(2xy - \frac{1}{x}\right) dx + x^2 dy = 0,$$

que es exacta. Su potencial es

$$F = x^2y - \ln x.$$

Resultado: $x^2y - \ln x = C$

Ecuaciones lineales de primer orden y aplicaciones

► [Ver este bloque en el vídeo \(2:10:33\)](#)

Para $y' + P(x)y = Q(x)$ utilizamos el factor integrante $\mu = e^{\int P(x) dx}$. Después aparecen dos aplicaciones físicas del mismo método.

Ejercicio 27. Lineal de primer orden

Vídeo: 2:10:33

Tipo: Lineal de primer orden

Resuelve

$$y' + 2y = 6.$$

Solución.

El factor integrante es

$$\mu = e^{2x}.$$

Multiplicando,

$$(e^{2x}y)' = 6e^{2x}.$$

Integramos:

$$e^{2x}y = 3e^{2x} + C.$$

Resultado: $y = 3 + Ce^{-2x}$

Ejercicio 28. Lineal con coeficientes variables**Vídeo:** 2:14:19**Tipo:** Lineal de primer ordenResuelve, para $x \neq 0$,

$$xy' - 2y = x^2.$$

Solución.Dividimos entre x :

$$y' - \frac{2}{x}y = x.$$

El factor integrante es

$$\mu = e^{\int -2/x dx} = \frac{1}{x^2}.$$

Así,

$$\left(\frac{y}{x^2}\right)' = \frac{1}{x}.$$

Integramos:

$$\frac{y}{x^2} = \ln|x| + C.$$

Resultado: $y = x^2(\ln|x| + C)$

Ejercicio 29. Lineal con exponencial**Vídeo:** 2:18:40**Tipo:** Lineal de primer orden

Resuelve

$$y' + 5y = e^{5x}.$$

Solución.El factor integrante es e^{5x} . Entonces

$$(e^{5x}y)' = e^{10x}.$$

Integrando,

$$e^{5x}y = \frac{1}{10}e^{10x} + C.$$

Resultado: $y = \frac{1}{10}e^{5x} + Ce^{-5x}$

Ejercicio 30. Lineal con tangente**Vídeo:** 2:21:40**Tipo:** Lineal de primer orden

Resuelve, para

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2},$$

la ecuación

$$y' - y \tan x = 1.$$

Solución.Aquí $P(x) = -\tan x$. El factor integrante es

$$\mu = e^{\int -\tan x dx} = \cos x.$$

Multiplicando,

$$(y \cos x)' = \cos x.$$

Integramos:

$$y \cos x = \sin x + C.$$

Resultado: $y = \tan x + C \sec x$

Ejercicio 31. Ley de enfriamiento de Newton

Vídeo: 2:27:06

Tipo: Aplicación lineal de primer orden

Un objeto está inicialmente a 90°C en una habitación a 20°C . A los 10 minutos está a 55°C . ¿Cuándo alcanzará 30°C ?

Solución.

La ley de enfriamiento es

$$T' = -k(T - 20),$$

es decir,

$$T' + kT = 20k.$$

Su solución es

$$T(t) = 20 + Ce^{-kt}.$$

De $T(0) = 90$ se obtiene $C = 70$. Con $T(10) = 55$:

$$35 = 70e^{-10k} \implies k = \frac{\ln 2}{10}.$$

Para $T = 30$:

$$30 = 20 + 70e^{-kt} \implies \frac{1}{7} = e^{-kt}.$$

Por tanto,

$$t = \frac{10 \ln 7}{\ln 2} \approx 28,1 \text{ min.}$$

Resultado: $t \approx 28,1 \text{ min}$

Ejercicio 32. Caída con resistencia del aire

Vídeo: 2:40:11

Tipo: Aplicación lineal de primer orden

Un objeto de masa m cae desde cierta altura. La resistencia del aire es proporcional a la velocidad. Suponiendo que parte del reposo, expresa $v(t)$ tomando positivo el sentido de caída.

Solución.

La segunda ley de Newton da

$$mv' = mg - kv,$$

o bien

$$v' + \frac{k}{m}v = g.$$

El factor integrante es

$$\mu = e^{(k/m)t}.$$

Integrando,

$$v = \frac{mg}{k} + Ce^{-(k/m)t}.$$

Como $v(0) = 0$,

$$C = -\frac{mg}{k}.$$

Resultado:
$$v(t) = \frac{mg}{k} (1 - e^{-kt/m})$$

Ecuaciones de Bernoulli

► [Ver este bloque en el vídeo \(2:46:18\)](#)

Una ecuación $y' + P(x)y = Q(x)y^n$ con $n \neq 0, 1$ se transforma en lineal mediante $v = y^{1-n}$.

Ejercicio 33. Bernoulli con $n = 2$

Vídeo: 2:46:18

Tipo: Ecuación de Bernoulli

Resuelve

$$y' + y = y^2.$$

Solución.

Tomamos

$$v = y^{-1} = \frac{1}{y}, \quad v' = -\frac{y'}{y^2}.$$

La ecuación se transforma en

$$v' - v = -1.$$

El factor integrante es e^{-x} :

$$(e^{-x}v)' = -e^{-x}.$$

Integrando,

$$e^{-x}v = e^{-x} + C, \quad v = 1 + Ce^x.$$

Como $v = 1/y$,

Resultado:
$$y = \frac{1}{1 + Ce^x}$$

Ejercicio 34. Bernoulli con $n = -1$

Vídeo: 2:52:21

Tipo: Ecuación de Bernoulli

Resuelve

$$yy' - 2y^2 = e^x.$$

Solución.

Multiplicamos por 2 y tomamos

$$v = y^2, \quad v' = 2yy'.$$

Así,

$$v' - 4v = 2e^x.$$

El factor integrante es e^{-4x} :

$$(e^{-4x}v)' = 2e^{-3x}.$$

Integrando,

$$e^{-4x}v = -\frac{2}{3}e^{-3x} + C,$$

y por tanto

$$v = -\frac{2}{3}e^x + Ce^{4x}.$$

Como $v = y^2$,

Resultado: $y = \pm \sqrt{-\frac{2}{3}e^x + Ce^{4x}}$

Ejercicio 35. Bernoulli con coeficiente $1/x$

Vídeo: 2:59:21

Tipo: Ecuación de Bernoulli

Resuelve, para $x > 0$,

$$y' + \frac{1}{x}y = xy^2.$$

Solución.

Tomamos

$$v = \frac{1}{y}, \quad v' = -\frac{y'}{y^2}.$$

Dividiendo la ecuación entre y^2 se obtiene

$$-v' + \frac{1}{x}v = x,$$

o bien

$$v' - \frac{1}{x}v = -x.$$

El factor integrante es $1/x$, y entonces

$$\left(\frac{v}{x}\right)' = -1.$$

Integrando,

$$\frac{v}{x} = -x + C, \quad v = Cx - x^2.$$

Como $v = 1/y$,

Resultado: $y = \frac{1}{Cx - x^2}$

Ecuaciones lineales homogéneas de orden superior

► Ver este bloque en el vídeo (3:05:45)

Para ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes utilizamos la ecuación característica. Se practican raíces reales distintas, repetidas, complejas y órdenes 3 y 4.

Ejercicio 36. Segundo orden: raíces reales distintas**Vídeo:** 3:05:45**Tipo:** Lineal homogénea de segundo orden

Resuelve

$$y'' - 4y = 0.$$

Solución.

La ecuación característica es

$$m^2 - 4 = 0 = (m - 2)(m + 2).$$

Sus raíces son $m = 2$ y $m = -2$.

Resultado: $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x}$

Ejercicio 37. Segundo orden: raíz doble**Vídeo:** 3:07:48**Tipo:** Lineal homogénea de segundo orden

Resuelve

$$y'' + 4y' + 4y = 0.$$

Solución.

La ecuación característica es

$$m^2 + 4m + 4 = (m + 2)^2 = 0.$$

La raíz $m = -2$ es doble. Para una raíz doble, las soluciones independientes son e^{-2x} y $x e^{-2x}$.

Resultado: $y = (C_1 + C_2 x) e^{-2x}$

Ejercicio 38. Segundo orden: raíces complejas**Vídeo:** 3:10:15**Tipo:** Lineal homogénea de segundo orden

Resuelve

$$y'' + 6y' + 12y = 0.$$

Solución.

La ecuación característica es

$$m^2 + 6m + 12 = 0.$$

Las raíces son

$$m = -3 \pm i\sqrt{3}.$$

Con $\alpha = -3$ y $\beta = \sqrt{3}$, la solución real es

Resultado: $y = e^{-3x} (C_1 \cos(\sqrt{3}x) + C_2 \sin(\sqrt{3}x))$

Ejercicio 39. Segundo orden con condiciones iniciales**Vídeo:** 3:14:12**Tipo:** Lineal homogénea de segundo orden

Resuelve

$$y'' + y' - 6y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Solución.

La característica es

$$m^2 + m - 6 = (m + 3)(m - 2) = 0,$$

por lo que

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x}.$$

Las condiciones iniciales dan

$$C_1 + C_2 = 1, \quad -3C_1 + 2C_2 = 0.$$

De aquí,

$$C_1 = \frac{2}{5}, \quad C_2 = \frac{3}{5}.$$

Resultado:

$$y = \frac{2}{5}e^{-3x} + \frac{3}{5}e^{2x}$$

Ejercicio 40. Ecuación lineal de tercer orden

Vídeo: 3:20:01

Tipo: Lineal homogénea de tercer orden

Resuelve

$$y''' - y' = 0.$$

Solución.

La ecuación característica es

$$m^3 - m = m(m - 1)(m + 1) = 0.$$

Las raíces son 0, 1 y -1.

Resultado:

$$y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^x$$

Ejercicio 41. Raíz triple

Vídeo: 3:22:41

Tipo: Lineal homogénea de tercer orden

Resuelve

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = 0.$$

Solución.

La característica es

$$m^3 + 3m^2 + 3m + 1 = (m + 1)^3 = 0.$$

La raíz $m = -1$ tiene multiplicidad 3. Por ello aparecen los factores 1, x y x^2 .

Resultado:

$$y = e^{-x}(C_1 + C_2 x + C_3 x^2)$$

Ejercicio 42. Ecuación lineal de cuarto orden

Vídeo: 3:24:57

Tipo: Lineal homogénea de cuarto orden

Resuelve

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0.$$

Solución.

La característica es

$$m^4 + 2m^2 + 1 = (m^2 + 1)^2 = 0.$$

Las raíces $m = i$ y $m = -i$ son dobles. En forma real, las multiplicidades introducen los factores $x \cos x$ y $x \sin x$.

Resultado: $y = (C_1 + C_2x) \cos x + (C_3 + C_4x) \sin x$

Aplicaciones físicas de ecuaciones homogéneas

► Ver este bloque en el vídeo (3:27:59)

Tres aplicaciones directas: una masa unida a un muelle, un péndulo para pequeñas oscilaciones y un circuito LC ideal.

Ejercicio 43. Masa unida a un muelle

Vídeo: 3:27:59

Tipo: Movimiento armónico simple

Una masa de 2 kg alarga un muelle 20 cm. Desde la posición de equilibrio se desplaza 10 cm hacia abajo y se suelta con velocidad inicial 1,4 m/s hacia arriba. Toma $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ y considera positivo hacia abajo. Halla la posición $y(t)$.

Solución.

Por la ley de Hooke en equilibrio,

$$mg = k\Delta L,$$

de donde

$$k = \frac{2 \cdot 9,8}{0,2} = 98 \text{ N/m}.$$

La ecuación del movimiento es

$$y'' + \frac{k}{m}y = 0 \implies y'' + 49y = 0.$$

La solución general es

$$y = C_1 \cos 7t + C_2 \sin 7t.$$

Como

$$y(0) = 0,1, \quad y'(0) = -1,4,$$

obtenemos

$$C_1 = 0,1, \quad 7C_2 = -1,4 \Rightarrow C_2 = -0,2.$$

Resultado: $y(t) = 0,1 \cos 7t - 0,2 \sin 7t$

Ejercicio 44. Péndulo para pequeñas oscilaciones

Vídeo: 3:36:13

Tipo: Movimiento armónico simple

Un péndulo de longitud 0,4 m se separa de la vertical 0,1 radianes y se suelta desde el reposo. Toma $g \approx 10 \text{ m/s}^2$. Halla el desplazamiento angular $\theta(t)$.

Solución.

Para pequeñas oscilaciones,

$$\theta'' + \frac{g}{L}\theta = 0.$$

Con $g = 10$ y $L = 0,4$,

$$\theta'' + 25\theta = 0.$$

Así,

$$\theta = C_1 \cos 5t + C_2 \sin 5t.$$

Las condiciones

$$\theta(0) = 0,1, \quad \theta'(0) = 0$$

dan $C_1 = 0,1$ y $C_2 = 0$.

Resultado: $\theta(t) = 0,1 \cos 5t$

Ejercicio 45. Circuito LC

Vídeo: 3:41:19

Tipo: Aplicación de segundo orden

Un circuito LC ideal tiene inductancia $L = 1$ H y capacitancia $C = 0,01$ F. Inicialmente el condensador tiene carga $q(0) = 0,02$ C y la corriente es nula, $q'(0) = 0$. Halla la carga $q(t)$.

Solución.

En un circuito LC ideal,

$$Lq'' + \frac{1}{C}q = 0.$$

Con los datos,

$$q'' + 100q = 0.$$

Por tanto,

$$q = C_1 \cos 10t + C_2 \sin 10t.$$

De $q(0) = 0,02$ y $q'(0) = 0$ se obtiene

$$C_1 = 0,02, \quad C_2 = 0.$$

Resultado: $q(t) = 0,02 \cos 10t$ C

Ecuaciones no homogéneas y variación de constantes

► **Ver este bloque en el vídeo (3:46:02)**

La solución de una ecuación lineal no homogénea se escribe como $y = y_h + y_p$. En los primeros ejercicios se propone una particular adecuada; el ejercicio 50 se resuelve mediante variación de constantes.

Ejercicio 46. Forzamiento constante

Vídeo: 3:46:02

Tipo: Segundo orden no homogénea

Resuelve

$$y'' + y = 2.$$

Solución.

La homogénea asociada es

$$y'' + y = 0,$$

con

$$y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Como el término forzante es constante, proponemos $y_p = A$. Sustituyendo,

$$A = 2.$$

Resultado: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 2$

Ejercicio 47. Forzamiento polinómico

Vídeo: 3:49:26

Tipo: Segundo orden no homogénea

Resuelve

$$y'' + y = x.$$

Solución.

La parte homogénea es

$$y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Para una particular proponemos

$$y_p = Ax + B.$$

Como $y_p'' = 0$, al sustituir:

$$Ax + B = x.$$

Por comparación, $A = 1$ y $B = 0$.

Resultado: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x$

Ejercicio 48. Forzamiento sinusoidal

Vídeo: 3:52:13

Tipo: Coeficientes indeterminados

Resuelve

$$y'' + 4y = \sin x.$$

Solución.

La homogénea tiene solución

$$y_h = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Proponemos

$$y_p = A \sin x + B \cos x.$$

Entonces

$$y_p'' = -A \sin x - B \cos x.$$

Sustituyendo,

$$3A \sin x + 3B \cos x = \sin x.$$

Así,

$$A = \frac{1}{3}, \quad B = 0.$$

Resultado: $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{3} \sin x$

Ejercicio 49. Oscilación forzada sin amortiguamiento

Vídeo: 3:56:31

Tipo: Aplicación de segundo orden no homogénea

Una masa de 1 kg está unida a un muelle de constante $k = 9 \text{ N/m}$. Actúa sobre ella una fuerza externa $F(t) = \sin t \text{ N}$. Inicialmente el sistema está en reposo y en equilibrio. Halla el desplazamiento $y(t)$.

Solución.

La segunda ley de Newton conduce a

$$y'' + 9y = \sin t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

La solución homogénea es

$$y_h = C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t.$$

Buscamos

$$y_p = A \sin t + B \cos t.$$

Al sustituir,

$$8A \sin t + 8B \cos t = \sin t,$$

por lo que $A = 1/8$ y $B = 0$. Así,

$$y = C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t + \frac{1}{8} \sin t.$$

De las condiciones iniciales,

$$C_1 = 0, \quad 3C_2 + \frac{1}{8} = 0 \implies C_2 = -\frac{1}{24}.$$

Resultado: $y(t) = -\frac{1}{24} \sin 3t + \frac{1}{8} \sin t$

Ejercicio 50. Variación de constantes

Vídeo: 4:06:59

Tipo: Variación de constantes

Resuelve mediante variación de constantes

$$y'' = 1.$$

Solución.

La ecuación homogénea es

$$y'' = 0,$$

cuya solución es

$$y_h = C_1 + C_2 x.$$

Tomamos como sistema fundamental

$$y_1 = 1, \quad y_2 = x.$$

Buscamos una particular de la forma

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 = u_1 + u_2 x,$$

con

$$\begin{cases} u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0, \\ u_1' y_1' + u_2' y_2' = 1. \end{cases}$$

Como $y_1' = 0$ y $y_2' = 1$,

$$u_2' = 1 \Rightarrow u_2 = x,$$

y

$$u_1' + x = 0 \Rightarrow u_1' = -x \Rightarrow u_1 = -\frac{x^2}{2}.$$

Por tanto,

$$y_p = -\frac{x^2}{2} + x \cdot x = \frac{x^2}{2}.$$

Resultado: $y = C_1 + C_2 x + \frac{x^2}{2}$

Resumen final de métodos

Idea clave

La colección recorre, en el mismo orden de la clase, los siguientes procedimientos: integración directa; separación de variables; modelos exponenciales; ecuación logística; cambio $y = vx$ para ecuaciones homogéneas; función potencial para exactas; factores integrantes; ecuaciones lineales de primer orden; cambio de Bernoulli; ecuación característica para órdenes 2, 3 y 4; solución homogénea más particular para ecuaciones no homogéneas; y variación de constantes.

Matemáticas con Juan

50 ecuaciones diferenciales desde cero

[Volver a la clase completa en YouTube](#)