

50 PROBLEMAS DE DINÁMICA DESDE CERO

Leyes de Newton, rozamiento, tensiones, poleas y movimiento circular

Versión desarrollada: soluciones ampliadas paso a paso

MATEMÁTICAS CON JUAN

Vídeo completo en YouTube:

<https://youtu.be/KVRTwzyjp3g>

Documento reconstruido para coincidir con el orden, los datos y los resultados de la transcripción final del vídeo. Esta versión desarrolla más cada problema: antes de calcular se explica qué se está leyendo, qué fuerzas intervienen, qué eje conviene elegir y cómo interpretar el resultado final.

Método de dinámica en cinco pasos.

1. Aislar el cuerpo o elegir el sistema completo.
2. Dibujar solo las fuerzas reales que actúan sobre el cuerpo.
3. Elegir ejes adecuados y fijar el sentido positivo.
4. Aplicar la segunda ley de Newton en cada eje:

$$\sum F_x = ma_x, \quad \sum F_y = ma_y.$$

5. Si el movimiento es circular, aplicar además la ecuación radial:

$$\sum F_{\text{radial}} = m \frac{v^2}{r} = m\omega^2 r.$$

Constantes y relaciones frecuentes

Magnitud	Símbolo	Relación usada
Aceleración de la gravedad	g	$9,8 \text{ m/s}^2$
Peso	P	$P = mg$
Segunda ley de Newton		$\sum \vec{F} = m\vec{a}$
Rozamiento estático máximo	$f_{s,\text{máx}}$	$f_{s,\text{máx}} = \mu_s N$
Rozamiento cinético	f_k	$f_k = \mu_k N$
Movimiento circular		$a_c = v^2/r = \omega^2 r$
Relación lineal-angular		$v = \omega r$

Bloques de la colección

Bloque	Tema	Ejercicios
A	Fuerzas básicas, masa, peso, normal y leyes de Newton	1–10
B	Fuerzas oblicuas, componentes y aceleraciones	11–20
C	Rozamiento y planos inclinados	21–30
D	Sistemas con cuerdas, tensiones y poleas	31–37
E	Movimiento circular, fuerza centrípeta y equilibrio con fuerzas	38–50

Índice con tiempos del vídeo

N.º	Ejercicio	Tiempo
1	Segunda ley de Newton: fuerza necesaria	0:38
2	Dos fuerzas horizontales y aceleración	2:32
3	Velocidad constante y rozamiento	6:40
4	Calcular la masa usando $F=ma$	10:55
5	Peso en la Tierra y en la Luna	13:35
6	Fuerza normal sobre una mesa	16:16
7	Báscula en un ascensor acelerado	18:55
8	Tercera ley de Newton con patinadores	23:48
9	Fuerzas perpendiculares y resultante	31:03
10	Tercera fuerza desconocida	35:28
11	Fuerza oblicua: componentes y aceleración	39:59
12	Fuerza oblicua desconocida y normal	52:25
13	Caja tirada por una cuerda: aceleración y normal	1:05:00
14	Grúa, tensión y aceleración	1:13:39
15	Fuerza vertical, contacto con el suelo y normal	1:18:10
16	Sonda espacial: aceleración y velocidad	1:24:40
17	Dron: empuje inclinado y aceleración horizontal	1:29:13
18	Dos perros tiran de un trineo	1:38:09
19	Fuerza opuesta, frenado y distancia recorrida	1:54:19
20	Caja dentro de un ascensor acelerado	2:09:42
21	Rozamiento cinético en superficie horizontal	2:28:11
22	Disco de hockey y coeficiente de rozamiento	2:35:28
23	Rozamiento estático y rozamiento dinámico	2:43:21
24	Libro sobre el asiento de un coche que frena	2:50:12
25	Fuerza oblicua con rozamiento	3:07:00
26	Plano inclinado sin rozamiento	3:16:32
27	Plano inclinado con rozamiento	3:22:44
28	Rozamiento para bajar a velocidad constante	3:32:50
29	Subir por un plano inclinado sin rozamiento	3:42:11
30	Subir por un plano inclinado con rozamiento	3:47:16
31	Máquina de Atwood: aceleración y tensión	3:57:31
32	Bloque en mesa y masa colgante	4:05:56
33	Mesa rugosa, masa colgante y tensión	4:13:03
34	Tres masas, dos poleas y rozamiento	4:24:34
35	Plano inclinado y cuerpo colgante	4:37:22
36	Dos bloques en planos inclinados con rozamiento	4:49:25

N.º	Ejercicio	Tiempo
37	Polea fija, polea móvil y ventaja mecánica	5:12:15
38	Movimiento circular sobre una mesa horizontal	5:22:58
39	Automóvil en una curva horizontal	5:27:57
40	Curva peraltada sin rozamiento	5:35:06
41	Curva peraltada con rozamiento	5:44:45
42	Péndulo cónico	5:59:07
43	Circunferencia vertical: tensión arriba y abajo	6:13:01
44	Dos cuerdas y barra vertical giratoria	6:21:00
45	Sillas voladoras: velocidad angular y tensión	6:38:24
46	Resorte en movimiento circular	6:51:32
47	Autobús sobre un puente circular	7:06:00
48	Masa colgante y cuerpo girando sobre una mesa	7:12:01
49	Esferas cargadas en equilibrio	7:18:10
50	Cilindro giratorio: velocidad mínima para no caer	7:27:32

Bloque A. Fuerzas básicas, masa, peso, normal y leyes de Newton

En este primer bloque se fijan las ideas esenciales: fuerza neta, aceleración, peso, normal, tercera ley de Newton y significado físico del signo.

Ejercicio 1. Carrito: fuerza necesaria

Un carrito de masa $m = 4$ kg debe acelerar a razón de $2,5$ m/s².
Calcula la fuerza neta que debe actuar sobre el carrito.

Solución desarrollada.

Antes de calcular. Aquí no hay varias fuerzas ni rozamiento: el dato importante es que se pide una fuerza neta capaz de producir una aceleración conocida. Conviene leer $F = ma$ como una relación entre causa y efecto: si queremos una aceleración mayor, necesitamos mayor fuerza neta; si la masa es mayor, también.

De dónde sale la ecuación. La segunda ley de Newton no se introduce como una receta, sino como la definición dinámica de fuerza neta: la suma de fuerzas que actúa sobre el carrito es la que produce su aceleración. Como el enunciado pide directamente la fuerza neta, la ecuación completa es

$$\sum F = ma.$$

Aquí solo hay una incógnita: esa fuerza neta.

Aplicamos directamente la segunda ley de Newton:

$$F = ma.$$

Sustituimos:

$$F = 4 \cdot 2,5 = 10 \text{ N}.$$

$$F = 10 \text{ N}$$

Lectura del resultado. El resultado es una fuerza neta. Si hubiera varias fuerzas reales actuando, su suma tendría que valer 10 N en el sentido de la aceleración.

Ejercicio 2. Dos fuerzas horizontales

Sobre un bloque de masa $m = 2,5$ kg actúan dos fuerzas horizontales: una de 18 N hacia la derecha y otra de 7 N hacia la izquierda.
Calcula la aceleración del bloque.

Solución desarrollada.

Antes de calcular. El punto delicado no es la fórmula, sino el signo. Primero se fija un sentido positivo. Después se suman las fuerzas con signo: las que apuntan a la derecha entran positivas y las que apuntan a la izquierda entran negativas. Solo entonces se aplica $\sum F = ma$.

De dónde sale la ecuación. La segunda ley se aplica a la fuerza *resultante*, no a cada fuerza aislada. Por eso primero se construye la suma algebraica de fuerzas en el eje horizontal:

$$\sum F_x = 18 - 7.$$

Después esa resultante se iguala a ma .

Tomamos hacia la derecha como sentido positivo:

$$F_{net} = 18 - 7 = 11 \text{ N.}$$

Por tanto:

$$a = \frac{F_{net}}{m} = \frac{11}{2,5} = 4,4 \text{ m/s}^2.$$

$$a = 4,4 \text{ m/s}^2$$

La aceleración apunta hacia la derecha.

Lectura del resultado. El signo positivo de la aceleración confirma que gana la fuerza de 18 N: el bloque acelera hacia la derecha.

Ejercicio 3. Velocidad constante y rozamiento

Un bloque de hielo de masa $m = 0,4 \text{ kg}$ se desplaza hacia la derecha con velocidad constante $v = 12 \text{ m/s}$.

- Halla la fuerza necesaria para mantener esa velocidad si no hay rozamiento.
- Si aparece una fuerza de rozamiento de $0,8 \text{ N}$, calcula la aceleración.

Solución desarrollada.

Antes de calcular. Este ejercicio separa dos ideas que suelen mezclarse. Tener velocidad no implica tener fuerza neta. Lo que exige fuerza neta es cambiar la velocidad. Por eso, en el primer apartado la velocidad es grande pero constante; en el segundo aparece una fuerza de rozamiento que sí cambia el movimiento.

De dónde salen las ecuaciones. La aceleración mide el cambio de la velocidad. Si la velocidad es constante, entonces $a = 0$ y, por la segunda ley, la fuerza neta también es cero. Cuando aparece rozamiento, la única fuerza horizontal es el rozamiento; por eso se escribe

$$\sum F_x = F_r = ma.$$

El signo negativo aparece porque el rozamiento apunta contra el movimiento inicial.

a) Sin rozamiento. Si la velocidad es constante, la aceleración es cero:

$$a = 0.$$

Luego:

$$F_{net} = ma = 0.$$

b) Con rozamiento. Tomamos hacia la derecha como positivo. El rozamiento apunta hacia la izquierda:

$$F_r = -0,8 \text{ N.}$$

Entonces:

$$a = \frac{F_r}{m} = \frac{-0,8}{0,4} = -2 \text{ m/s}^2.$$

$$F = 0 \text{ N}$$

$$a = -2 \text{ m/s}^2$$

Lectura del resultado. El signo negativo no significa que la aceleración sea “mala”, sino que apunta contra el movimiento inicial. El bloque se va frenando.

Ejercicio 4. Masa a partir de fuerza y aceleración

Una fuerza neta de 36 N produce en un cuerpo una aceleración de $4,5 \text{ m/s}^2$.
Calcula la masa del cuerpo.

Solución desarrollada.

Antes de calcular. Aquí la incógnita no es la fuerza ni la aceleración, sino la masa. La segunda ley se usa al revés: si conocemos qué fuerza neta produce cierta aceleración, la masa mide cuánta inercia ofrece el cuerpo frente a ese cambio de movimiento.

De dónde sale el despeje. La ecuación de partida es $F = ma$. Como la incógnita es m , se divide entre a en ambos miembros:

$$m = \frac{F}{a}.$$

No es una fórmula nueva: es la misma segunda ley escrita para hallar la masa.

Partimos de:

$$F = ma.$$

Despejamos:

$$m = \frac{F}{a}.$$

Sustituimos:

$$m = \frac{36}{4,5} = 8 \text{ kg}.$$

$$m = 8 \text{ kg}$$

Lectura del resultado. Una masa de 8 kg significa que cada 8 N de fuerza neta producen 1 m/s^2 de aceleración.

Ejercicio 5. Peso en la Tierra y en la Luna

Una persona tiene masa $m = 70 \text{ kg}$.
Calcula su peso en la Tierra y en la Luna.
Datos:

$$g_T = 9,8 \text{ m/s}^2, \quad g_L = 1,6 \text{ m/s}^2.$$

Solución desarrollada.

Antes de calcular. La masa pertenece al cuerpo; el peso depende del campo gravitatorio donde esté. Por eso no se debe decir que la persona “pesa 70 kg”: 70 kg es su masa. El peso es una fuerza y se mide en newtons.

De dónde sale el peso. El peso es la fuerza gravitatoria que ejerce un planeta o satélite sobre el cuerpo. Cerca de la superficie, esa fuerza se modela como

$$P = mg.$$

La masa permanece igual; lo que cambia de la Tierra a la Luna es el valor de g .

El peso es:

$$P = mg.$$

En la Tierra:

$$P_T = 70 \cdot 9,8 = 686 \text{ N}.$$

En la Luna:

$$P_L = 70 \cdot 1,6 = 112 \text{ N}.$$

$$P_T = 686 \text{ N}$$

$$P_L = 112 \text{ N}$$

La masa no cambia; cambia el peso porque cambia la gravedad.

Lectura del resultado. La persona tiene la misma masa en ambos lugares, pero en la Luna su peso es mucho menor porque allí la gravedad es menor.

Ejercicio 6. Fuerza normal sobre una mesa

Un bloque de masa $m = 12 \text{ kg}$ está en equilibrio sobre una mesa horizontal. Calcula la fuerza normal que ejerce la mesa sobre el bloque.

Solución desarrollada.

Antes de calcular. La normal no es una fórmula fija igual a mg en todos los problemas. En este caso sí coincide con el peso porque el bloque está en equilibrio vertical y no hay otras fuerzas verticales. El razonamiento correcto es partir de $\sum F_y = 0$.

De dónde sale $N = mg$ en este caso. No se debe empezar escribiendo $N = mg$ por costumbre. Se empieza con el equilibrio vertical:

$$\sum F_y = 0.$$

Como solo actúan N hacia arriba y mg hacia abajo, resulta $N - mg = 0$ y entonces, solo en este caso, $N = mg$.

Como el bloque no acelera verticalmente:

$$N - P = 0.$$

Por tanto:

$$N = P = mg = 12 \cdot 9,8 = 117,6 \text{ N}.$$

$$N = 117,6 \text{ N}$$

Lectura del resultado. La normal sale hacia arriba y tiene el mismo módulo que el peso porque no hay aceleración vertical ni fuerzas verticales adicionales.

Ejercicio 7. Báscula en un ascensor

Una persona de masa $m = 60$ kg está sobre una báscula dentro de un ascensor. El ascensor acelera verticalmente hacia arriba con $a = 1,2$ m/s².

Calcula:

- a) la fuerza normal que la báscula ejerce sobre la persona;
- b) la lectura de la báscula si muestra kilogramos.

Solución desarrollada.

Antes de calcular. La báscula no mide directamente la masa real: mide la normal que ejerce sobre la persona y luego la traduce a una lectura en kilogramos. Al acelerar hacia arriba, la normal debe ser mayor que el peso para producir aceleración ascendente.

De dónde sale la normal del ascensor. La persona acelera hacia arriba, así que la fuerza hacia arriba debe superar al peso. Con eje vertical positivo hacia arriba:

$$\sum F_y = N - mg = ma.$$

De ahí sale $N = m(g + a)$. La lectura en kilogramos es la masa que tendría ese mismo peso aparente en reposo: $m_{\text{ind}} = N/g$.

Tomamos hacia arriba como positivo. Sobre la persona actúan N hacia arriba y mg hacia abajo:

$$N - mg = ma.$$

Entonces:

$$N = m(g + a) = 60(9,8 + 1,2) = 660 \text{ N}.$$

La lectura equivalente en kilogramos es:

$$m_{\text{ind}} = \frac{N}{g} = \frac{660}{9,8} \approx 67,3 \text{ kg}.$$

$$N = 660 \text{ N}$$

$$m_{\text{ind}} \approx 67,3 \text{ kg}$$

Lectura del resultado. La persona no ha aumentado su masa real: aumenta la lectura porque la báscula debe empujar más fuerte para acelerar a la persona hacia arriba.

Ejercicio 8. Tercera ley de Newton: patinadores

Dos patinadores tienen masas:

$$m_A = 48 \text{ kg}, \quad m_B = 72 \text{ kg}.$$

El patinador A empuja al patinador B con una fuerza de 144 N hacia la derecha.

Calcula:

- a) la fuerza que B ejerce sobre A;
- b) la aceleración de cada patinador.

Solución desarrollada.

Antes de calcular. La tercera ley no dice que las aceleraciones sean iguales. Dice que las fuerzas de interacción tienen el mismo módulo y sentidos opuestos. Como las masas son distintas, cada patinador responde con una aceleración distinta.

De dónde salen las aceleraciones. La tercera ley da el par de fuerzas de interacción:

$$\vec{F}_{A \rightarrow B} = -\vec{F}_{B \rightarrow A}.$$

Después se aplica la segunda ley por separado a cada patinador. Las fuerzas tienen el mismo módulo, pero al dividir por masas distintas aparecen aceleraciones distintas.

Tomamos hacia la derecha como sentido positivo:

$$\vec{F}_{A \rightarrow B} = 144 \hat{i} \text{ N}.$$

Por la tercera ley de Newton:

$$\vec{F}_{B \rightarrow A} = -144 \hat{i} \text{ N}.$$

Las aceleraciones son:

$$\vec{a}_A = \frac{-144}{48} \hat{i} = -3 \hat{i} \text{ m/s}^2,$$

$$\vec{a}_B = \frac{144}{72} \hat{i} = 2 \hat{i} \text{ m/s}^2.$$

$$\vec{F}_{B \rightarrow A} = -144 \hat{i} \text{ N}$$

$$\vec{a}_A = -3 \hat{i} \text{ m/s}^2$$

$$\vec{a}_B = 2 \hat{i} \text{ m/s}^2$$

Lectura del resultado. Las fuerzas de acción y reacción no se cancelan porque actúan sobre cuerpos distintos. Cada una se usa en la segunda ley del cuerpo correspondiente.

Ejercicio 9. Fuerzas perpendiculares

Sobre un cuerpo de masa $m = 2 \text{ kg}$ actúan dos fuerzas perpendiculares: una de 6 N horizontal y otra de 8 N vertical.

Calcula el módulo de la fuerza resultante y el módulo de la aceleración.

Solución desarrollada.

Antes de calcular. Como las fuerzas son perpendiculares, no se pueden sumar sus módulos sin más. Primero se construye la resultante vectorial con Pitágoras. Después, esa resultante es la fuerza neta que determina el módulo de la aceleración.

De dónde sale la resultante. Las fuerzas son perpendiculares, así que forman los catetos de un triángulo rectángulo. El módulo de la fuerza neta es la hipotenusa:

$$F_R = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}.$$

Luego se aplica $F_R = ma$ para el módulo de la aceleración.

La fuerza resultante se obtiene con Pitágoras:

$$F_R = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ N}.$$

La aceleración vale:

$$a = \frac{F_R}{m} = \frac{10}{2} = 5 \text{ m/s}^2.$$

$$F_R = 10 \text{ N}$$

$$a = 5 \text{ m/s}^2$$

Lectura del resultado. La aceleración tiene la misma dirección que la fuerza resultante. Aquí solo se pedía el módulo, pero vectorialmente apuntaría en la dirección de la diagonal.

Ejercicio 10. Tercera fuerza desconocida

Sobre un bloque de masa $m = 8 \text{ kg}$ actúan tres fuerzas horizontales. Una de 40 N apunta hacia la derecha, otra de 10 N apunta hacia la izquierda y la tercera es desconocida.

El bloque acelera hacia la derecha con $a = 1,5 \text{ m/s}^2$.

Calcula la tercera fuerza e indica su sentido.

Solución desarrollada.

Antes de calcular. Este problema enseña a no adivinar el sentido de la fuerza desconocida. Se supone un signo para F_3 y la ecuación decide. Si el resultado sale negativo, significa que la fuerza real apunta en el sentido contrario al positivo elegido.

De dónde sale la fuerza desconocida. Se escribe la segunda ley con signo antes de despejar:

$$\sum F_x = 40 - 10 + F_3 = ma.$$

El resultado negativo no es un error: indica que la fuerza real apunta en sentido contrario al sentido positivo elegido.

Tomamos hacia la derecha como sentido positivo:

$$40 - 10 + F_3 = ma.$$

Sustituimos:

$$40 - 10 + F_3 = 8 \cdot 1,5 = 12.$$

Por tanto:

$$F_3 = 12 - 30 = -18 \text{ N}.$$

$$F_3 = -18 \text{ N}$$

La tercera fuerza tiene módulo 18 N y apunta hacia la izquierda.

Lectura del resultado. El resultado negativo corrige el dibujo inicial: F_3 apunta hacia la izquierda y reduce la fuerza neta total hasta 12 N .

Bloque B. Fuerzas oblicuas, componentes y aceleraciones

Aquí aparecen fuerzas que no están alineadas con los ejes. La clave es descomponer antes de aplicar la segunda ley de Newton.

Ejercicio 11. Fuerza oblicua en una pista de hielo

Sobre un disco de masa $m = 4 \text{ kg}$, en una pista de hielo, actúa una fuerza de 20 N que forma un ángulo de 60° con la horizontal.

Calcula:

- las componentes horizontal y vertical de la fuerza;
- las componentes de la aceleración;
- el módulo y la dirección de la aceleración.

Solución desarrollada.

Antes de calcular. Una fuerza oblicua actúa a la vez en dos direcciones. Por eso no se aplica la segunda ley con el módulo de la fuerza para cada eje: primero se descompone en F_x y F_y , y cada componente produce la componente correspondiente de la aceleración.

De dónde salen las componentes. Una fuerza oblicua se proyecta sobre los ejes. Como el ángulo se mide desde la horizontal, la componente horizontal es el cateto adyacente y la vertical el opuesto:

$$F_x = F \cos \theta, \quad F_y = F \sin \theta.$$

Después se aplica $\sum F_x = ma_x$ y $\sum F_y = ma_y$.

Las componentes de la fuerza son:

$$F_x = F \cos 60^\circ = 20 \cdot \frac{1}{2} = 10 \text{ N},$$

$$F_y = F \sin 60^\circ = 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3} \text{ N}.$$

Las componentes de la aceleración son:

$$a_x = \frac{F_x}{m} = \frac{10}{4} = 2,5 \text{ m/s}^2,$$

$$a_y = \frac{F_y}{m} = \frac{10\sqrt{3}}{4} = 2,5\sqrt{3} \text{ m/s}^2.$$

El módulo:

$$a = \sqrt{(2,5)^2 + (2,5\sqrt{3})^2} = 5 \text{ m/s}^2.$$

Y:

$$\tan \theta = \frac{a_y}{a_x} = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = 60^\circ.$$

$$F_x = 10 \text{ N}$$

$$F_y = 10\sqrt{3} \text{ N}$$

$$a = 5 \text{ m/s}^2$$

$$\theta = 60^\circ$$

Lectura del resultado. La dirección de la aceleración coincide con la dirección de la fuerza aplicada porque la masa es un escalar positivo: dividir por m no cambia el ángulo.

Ejercicio 12. Fuerza oblicua desconocida y normal

Un cuerpo de masa $m = 10 \text{ kg}$ se mueve horizontalmente sin rozamiento con aceleración $a = 3 \text{ m/s}^2$ debido a una fuerza oblicua desconocida.

Se sabe que la fuerza normal vale:

$$N = 68 \text{ N.}$$

Calcula las componentes, el módulo y el ángulo de la fuerza oblicua.

Solución desarrollada.

Antes de calcular. La normal aporta información sobre la componente vertical de la fuerza oblicua. Si la normal es menor que el peso, significa que la fuerza aplicada tira parcialmente hacia arriba. El movimiento horizontal, en cambio, nos permite obtener F_x mediante $F_x = ma$.

De dónde salen F_x y F_y . El movimiento horizontal fija la componente horizontal:

$$F_x = ma.$$

La componente vertical se obtiene del equilibrio vertical. Como no hay aceleración en vertical,

$$N + F_y - mg = 0,$$

y de ahí $F_y = mg - N$.

En horizontal:

$$F_x = ma = 10 \cdot 3 = 30 \text{ N.}$$

En vertical no hay aceleración:

$$N + F_y - mg = 0.$$

Luego:

$$F_y = mg - N = 10 \cdot 9,8 - 68 = 30 \text{ N.}$$

El módulo de la fuerza es:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{30^2 + 30^2} = 30\sqrt{2} \text{ N.}$$

Como las dos componentes son iguales:

$$\theta = 45^\circ.$$

$$F_x = 30 \text{ N}$$

$$F_y = 30 \text{ N}$$

$$F = 30\sqrt{2} \text{ N}$$

$$\theta = 45^\circ$$

Lectura del resultado. Como F_x y F_y son iguales, la fuerza forma 45° con la horizontal y tira hacia arriba y hacia delante con la misma intensidad.

Ejercicio 13. Caja tirada por una cuerda inclinada

Una caja de masa $m = 20 \text{ kg}$ está sobre una superficie horizontal sin rozamiento. Se tira de ella con una cuerda que ejerce una tensión de 100 N formando un ángulo de 30° sobre la horizontal.

Calcula la aceleración de la caja y la fuerza normal.

Solución desarrollada.

Antes de calcular. La cuerda no solo tira hacia delante: también tira hacia arriba. Por eso la componente horizontal produce aceleración, mientras que la componente vertical reduce la normal. Es importante resolver por ejes, no con el módulo total de la tensión.

De dónde salen las ecuaciones. La tensión se descompone porque tiene una parte horizontal y otra vertical. La parte horizontal acelera la caja:

$$T \cos \theta = ma.$$

La parte vertical no acelera, sino que reduce la normal:

$$N + T \sin \theta - mg = 0.$$

Descomponemos la tensión:

$$T_x = T \cos 30^\circ = 100 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3} \text{ N},$$

$$T_y = T \sin 30^\circ = 50 \text{ N}.$$

En horizontal:

$$T_x = ma \Rightarrow a = \frac{50\sqrt{3}}{20} = \frac{5\sqrt{3}}{2} \text{ m/s}^2 \approx 4,33 \text{ m/s}^2.$$

En vertical:

$$N + T_y - mg = 0 \Rightarrow N = mg - T_y.$$

$$N = 20 \cdot 9,8 - 50 = 146 \text{ N}.$$

$$a = \frac{5\sqrt{3}}{2} \text{ m/s}^2 \approx 4,33 \text{ m/s}^2$$

$$N = 146 \text{ N}$$

Lectura del resultado. La normal es menor que mg porque parte del peso queda compensado por la componente vertical de la tensión.

Ejercicio 14. Grúa: tensión y aceleración

Una grúa levanta una carga de masa $m = 25 \text{ kg}$ mediante una cuerda. La tensión de la cuerda es $T = 300 \text{ N}$. Calcula la aceleración de la carga.

Solución desarrollada.

Antes de calcular. La carga no está simplemente en equilibrio. Como la tensión es mayor que el peso, la fuerza neta vertical apunta hacia arriba y aparece una aceleración ascendente. El signo se entiende mejor tomando hacia arriba como positivo.

De dónde sale la tensión. En una elevación vertical, sobre la carga actúan T hacia arriba y mg hacia abajo. Si la carga acelera hacia arriba,

$$T - mg = ma.$$

Por eso $T = m(g + a)$. Si baja acelerando o sube frenando, el signo de a cambiaría.

Tomamos hacia arriba como positivo:

$$T - mg = ma.$$

Despejamos:

$$a = \frac{T - mg}{m} = \frac{300 - 25 \cdot 9,8}{25}.$$

$$a = \frac{300 - 245}{25} = 2,2 \text{ m/s}^2.$$

$$a = 2,2 \text{ m/s}^2$$

La carga acelera hacia arriba.

Lectura del resultado. La carga sube acelerando porque la tensión supera al peso. Si $T = mg$, subiría con velocidad constante o estaría en reposo.

Ejercicio 15. Fuerza vertical y pérdida de contacto

Una caja de masa $m = 10 \text{ kg}$ está sobre el suelo. Sobre ella se aplica una fuerza vertical hacia arriba. Analiza:

- a) $F = 60 \text{ N}$;
- b) $F = 120 \text{ N}$.

En cada caso, determina si permanece en contacto con el suelo, la fuerza normal y la aceleración vertical.

Solución desarrollada.

Antes de calcular. Aquí hay una condición física antes de hacer cuentas: el suelo solo puede empujar hacia arriba, nunca tirar hacia abajo. Si al imponer contacto sale una normal negativa, eso indica que el contacto ya se ha perdido.

De dónde sale la pérdida de contacto. Mientras hay contacto, la superficie puede ejercer normal. La ecuación vertical es

$$N + F - mg = ma_y$$

según el sentido de la fuerza aplicada. El contacto se pierde cuando la normal tendría que salir negativa; físicamente una superficie no puede tirar del cuerpo, solo empujarlo. El límite es $N = 0$.

El peso de la caja es:

$$P = mg = 10 \cdot 9,8 = 98 \text{ N}.$$

a) $F = 60 \text{ N}$. Si la caja sigue apoyada:

$$N + F - P = 0 \quad \Rightarrow \quad N = P - F = 98 - 60 = 38 \text{ N}.$$

Como $N > 0$, hay contacto y $a_y = 0$.

b) $F = 120 \text{ N}$. La ecuación de contacto daría:

$$N = 98 - 120 = -22 \text{ N},$$

lo cual es imposible. Por tanto, la caja pierde el contacto y $N = 0$.

Entonces:

$$F - P = ma_y.$$

$$a_y = \frac{120 - 98}{10} = 2,2 \text{ m/s}^2.$$

$$F = 60 \text{ N} : \quad N = 38 \text{ N}, \quad a_y = 0$$

$$F = 120 \text{ N} : \quad N = 0, \quad a_y = 2,2 \text{ m/s}^2 \text{ hacia arriba}$$

Lectura del resultado. La normal nunca puede ser negativa. Cuando el cálculo exigiría $N < 0$, el suelo deja de actuar y la caja se separa.

Ejercicio 16. Sonda espacial

Una sonda espacial de masa $m = 500$ kg, lejos de cualquier interacción gravitatoria, recibe una fuerza constante de 0,2 N. Parte del reposo.

Calcula:

- a) la aceleración;
- b) la velocidad a los 60 s.

Solución desarrollada.

Antes de calcular. En el espacio, una fuerza pequeña puede producir aceleración si actúa durante tiempo suficiente. No hay que esperar una aceleración grande: basta con aplicar $F = ma$ y luego usar la cinemática de aceleración constante.

De dónde sale la fuerza de la sonda. En el espacio idealizado del ejercicio se desprecia el rozamiento. Por tanto, la única fuerza relevante es la fuerza neta de los propulsores. La segunda ley queda directamente

$$F_{\text{prop}} = ma.$$

La aceleración es:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{0,2}{500} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}^2.$$

Como parte del reposo:

$$v = at = 4 \cdot 10^{-4} \cdot 60 = 2,4 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}.$$

$$a = 4 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}^2$$

$$v = 2,4 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$$

Lectura del resultado. Aunque la fuerza sea de solo 0,2 N, al no haber otras fuerzas la sonda va acumulando velocidad con el tiempo.

Ejercicio 17. Dron que mantiene la altura

Un dron de masa $m = 2$ kg mantiene constante su altura mientras acelera horizontalmente hacia la derecha. La fuerza total de empuje de sus hélices es $F = 28$ N y está inclinada un ángulo θ respecto de la vertical.

Calcula:

- a) el ángulo θ ;
- b) la componente horizontal de la fuerza de empuje;
- c) la aceleración horizontal del dron.

Solución desarrollada.

Antes de calcular. El dron mantiene la altura, así que en vertical la fuerza neta debe ser cero. Esa condición fija la componente vertical del empuje. La parte restante del empuje es horizontal y es la que acelera al dron.

De dónde sale el empuje del dron. El dron mantiene la altura cuando la suma vertical de fuerzas es cero. Si además acelera horizontalmente, las hélices deben inclinar el empuje para que una componente compense el peso y la otra produzca ma :

$$F_y = mg, \quad F_x = ma.$$

Como el dron mantiene constante su altura, la componente vertical del empuje equilibra el peso:

$$F \cos \theta = mg.$$

Así:

$$\cos \theta = \frac{2 \cdot 9,8}{28} = 0,7.$$

$$\theta = \arccos(0,7) \approx 45,6^\circ.$$

La componente horizontal vale:

$$F_x = \sqrt{F^2 - (mg)^2} = \sqrt{28^2 - 19,6^2} \approx 20 \text{ N}.$$

Por tanto:

$$a_x = \frac{F_x}{m} = \frac{20}{2} = 10 \text{ m/s}^2.$$

$$\theta \approx 45,6^\circ$$

$$F_x \approx 20 \text{ N}$$

$$a_x \approx 10 \text{ m/s}^2$$

Lectura del resultado. El empuje total es mayor que el peso porque además de sostener al dron debe aportar una componente horizontal para acelerar.

Ejercicio 18. Dos perros tiran de un trineo

Dos perros tiran de un trineo de masa $m = 30 \text{ kg}$ que avanza sobre el eje x . El primer perro ejerce una fuerza de 40 N formando 20° por encima del eje x . El segundo tira hacia el lado contrario formando 15° por debajo del eje x .

La fuerza del segundo perro se ajusta para que el trineo no se desvíe lateralmente.

Calcula:

- la fuerza que ejerce el segundo perro;
- las componentes y el módulo de la fuerza resultante;
- la aceleración del trineo.

Solución desarrollada.

Antes de calcular. El trineo avanza sobre el eje x sin desviarse lateralmente. Eso impone una condición clave: la suma de componentes verticales debe ser cero. Después se suman las componentes horizontales para hallar la fuerza resultante útil.

De dónde sale la fuerza resultante. Las dos fuerzas de los perros son vectores. Se descomponen en componentes, se suman las componentes horizontales y verticales, y solo después se reconstruye el módulo:

$$F_R = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2}.$$

La aceleración sale de $F_R = ma$.

Para que no haya desviación lateral, las componentes verticales deben anularse:

$$40 \sin 20^\circ = F_2 \sin 15^\circ.$$

Por tanto:

$$F_2 = \frac{40 \sin 20^\circ}{\sin 15^\circ} \approx 52,85 \text{ N}.$$

La resultante horizontal es:

$$F_R = 40 \cos 20^\circ + 52,85 \cos 15^\circ \approx 88,64 \text{ N}.$$

La componente vertical es nula:

$$F_y = 0.$$

La aceleración:

$$a = \frac{F_R}{m} = \frac{88,64}{30} \approx 2,95 \text{ m/s}^2.$$

$$F_2 \approx 52,85 \text{ N}$$

$$F_x \approx 88,64 \text{ N}$$

$$F_y = 0$$

$$a \approx 2,95 \text{ m/s}^2$$

Lectura del resultado. La resultante final queda sobre el eje x , tal como exige el enunciado: no hay desviación lateral.

Ejercicio 19. Fuerza opuesta al movimiento

Un bloque de masa $m = 5 \text{ kg}$ se mueve inicialmente hacia la derecha con velocidad $v_0 = 12 \text{ m/s}$. Desde $t = 0$ actúa sobre él una fuerza horizontal constante de 20 N opuesta al movimiento.

Calcula:

- la aceleración;
- el tiempo que tarda en detenerse;
- la distancia recorrida antes de detenerse;
- la velocidad y el desplazamiento a los 5 s .

Solución desarrollada.

Antes de calcular. La fuerza es opuesta al movimiento inicial, de modo que la aceleración sale negativa si tomamos la derecha como positiva. Hasta detenerse, el bloque se frena; después, si la fuerza sigue actuando, empezaría a moverse en sentido contrario.

De dónde sale el signo del frenado. La fuerza opuesta al movimiento se escribe con signo negativo si tomamos positivo el sentido de avance. La ecuación no cambia:

$$\sum F_x = ma.$$

Lo que cambia es el signo de la fuerza, y por eso la aceleración sale negativa.

Tomamos hacia la derecha como sentido positivo:

$$F = -20 \text{ N}.$$

Entonces:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{-20}{5} = -4 \text{ m/s}^2.$$

Para detenerse:

$$0 = v_0 + at = 12 - 4t \Rightarrow t = 3 \text{ s.}$$

La distancia hasta detenerse:

$$0 = v_0^2 + 2a\Delta x \Rightarrow 0 = 12^2 + 2(-4)\Delta x.$$

$$\Delta x = 18 \text{ m.}$$

A los 5 s:

$$v = 12 - 4 \cdot 5 = -8 \text{ m/s,}$$

$$\Delta x = 12 \cdot 5 + \frac{1}{2}(-4)5^2 = 10 \text{ m.}$$

$$a = -4 \text{ m/s}^2$$

$$t = 3 \text{ s}$$

$$\Delta x_{\text{máx}} = 18 \text{ m}$$

$$v(5) = -8 \text{ m/s}$$

$$\Delta x(5) = 10 \text{ m}$$

Lectura del resultado. A los 5 s ya ha pasado el instante de parada; el signo de la velocidad indica que el bloque se mueve hacia la izquierda.

Ejercicio 20. Caja en un ascensor acelerado

En el interior de un ascensor que acelera verticalmente hacia arriba con $a_y = 1,2 \text{ m/s}^2$, una persona tira de una caja de masa $m = 20 \text{ kg}$ con una fuerza de 100 N que forma $53,1^\circ$ sobre la horizontal. La caja está inicialmente en reposo sobre el suelo del ascensor y no hay rozamiento.

Usa:

$$\cos 53,1^\circ \approx 0,60, \quad \sin 53,1^\circ \approx 0,80.$$

Calcula las componentes de la fuerza, la normal, la aceleración horizontal, la velocidad y desplazamiento horizontales en 4 s, y la fuerza límite para perder el contacto.

Solución desarrollada.

Antes de calcular. El ascensor obliga a separar claramente los ejes. En horizontal la fuerza oblicua acelera la caja. En vertical, la caja acompaña al ascensor: no se queda con aceleración vertical cero, sino con la aceleración vertical del ascensor.

De dónde salen los distintos casos del ascensor. La ecuación general para la caja es siempre

$$N - mg = ma_y.$$

Si el ascensor acelera hacia arriba, a_y es positiva; si acelera hacia abajo, a_y es negativa; si va con velocidad constante, $a_y = 0$. Todas las fórmulas salen de esa única ecuación con signos.

Las componentes son:

$$F_x = 100 \cos 53,1^\circ \approx 60 \text{ N}, \quad F_y = 100 \sin 53,1^\circ \approx 80 \text{ N.}$$

En vertical, mientras hay contacto:

$$N + F_y - mg = ma_y.$$

Así:

$$N = m(g + a_y) - F_y = 20(9,8 + 1,2) - 80 = 140 \text{ N.}$$

En horizontal:

$$a_x = \frac{F_x}{m} = \frac{60}{20} = 3 \text{ m/s}^2.$$

Como parte del reposo horizontal:

$$v_x = 3 \cdot 4 = 12 \text{ m/s},$$

$$\Delta x = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4^2 = 24 \text{ m}.$$

Para perder el contacto:

$$N = 0.$$

Por tanto:

$$F_{\text{lím}} \sin \theta = m(g + a_y).$$

$$F_{\text{lím}} = \frac{20(9,8 + 1,2)}{0,80} = 275 \text{ N}.$$

$$F_x = 60 \text{ N}$$

$$F_y = 80 \text{ N}$$

$$N = 140 \text{ N}$$

$$a_x = 3 \text{ m/s}^2$$

$$v_x(4) = 12 \text{ m/s}$$

$$\Delta x(4) = 24 \text{ m}$$

$$F_{\text{lím}} = 275 \text{ N}$$

Lectura del resultado. La normal sale positiva, así que la caja sigue en contacto. La fuerza límite indica cuándo la componente vertical de la tracción haría desaparecer el contacto.

Bloque C. Rozamiento y planos inclinados

El rozamiento puede oponerse al movimiento o a la tendencia de movimiento. En planos inclinados conviene elegir un eje paralelo al plano y otro perpendicular.

Ejercicio 21. Rozamiento dinámico horizontal

Una caja de masa $m = 15$ kg es arrastrada sobre una superficie horizontal por una fuerza horizontal de 75 N. El coeficiente de rozamiento cinético es $\mu_k = 0,25$.

Calcula:

- a) la fuerza normal;
- b) la fuerza de rozamiento;
- c) la aceleración de la caja.

Solución desarrollada.

Antes de calcular. Primero se calcula la normal, porque el rozamiento cinético depende de ella. Después se resta el rozamiento a la fuerza aplicada. El rozamiento no desaparece por estar el cuerpo en movimiento: precisamente actúa porque hay deslizamiento.

De dónde sale el rozamiento dinámico. En una superficie horizontal sin otras fuerzas verticales, primero se obtiene la normal por equilibrio vertical: $N = mg$. Cuando hay deslizamiento, el modelo de rozamiento cinético da

$$f_k = \mu_k N.$$

Después el rozamiento entra en $\sum F_x = ma$ con signo contrario al movimiento.

Como la fuerza aplicada es horizontal:

$$N = mg = 15 \cdot 9,8 = 147 \text{ N}.$$

El rozamiento cinético es:

$$f_k = \mu_k N = 0,25 \cdot 147 = 36,75 \text{ N}.$$

La fuerza neta horizontal:

$$F_{net} = 75 - 36,75 = 38,25 \text{ N}.$$

Por tanto:

$$a = \frac{38,25}{15} = 2,55 \text{ m/s}^2.$$

$$N = 147 \text{ N}$$

$$f_k = 36,75 \text{ N}$$

$$a = 2,55 \text{ m/s}^2$$

Lectura del resultado. La fuerza aplicada no se transforma entera en aceleración: una parte se pierde compensando el rozamiento.

Ejercicio 22. Disco de hockey que se detiene

Un disco de hockey se desliza sobre el hielo con velocidad inicial $v_0 = 14$ m/s y recorre 100 m antes de detenerse.

Calcula el coeficiente de rozamiento cinético entre el disco y el hielo.

Solución desarrollada.

Antes de calcular. No se da la masa del disco y no hace falta. La cinemática permite obtener la aceleración de frenado. Después, en dinámica, esa aceleración se relaciona con el rozamiento; la masa se cancela al calcular μ_k .

De dónde salen aceleración y distancia de frenado. El rozamiento cinético produce una aceleración constante opuesta al movimiento:

$$a = -\mu_k g.$$

Una vez conocida esa aceleración, la distancia de frenado sale de la ecuación cinemática

$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x,$$

no de una fórmula nueva de dinámica.

Primero hallamos la aceleración usando cinemática:

$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x.$$

Como se detiene:

$$0 = 14^2 + 2a \cdot 100.$$

$$a = -\frac{196}{200} = -0,98 \text{ m/s}^2.$$

El único responsable de esta aceleración es el rozamiento:

$$a = -\mu_k g.$$

Así:

$$\mu_k = \frac{0,98}{9,8} = 0,10.$$

$$\mu_k = 0,10$$

Lectura del resultado. El coeficiente obtenido es pequeño, coherente con un disco de hockey sobre hielo: el rozamiento es débil y la distancia de frenado grande.

Ejercicio 23. Rozamiento estático y dinámico

Un bloque de masa $m = 20 \text{ kg}$ está inicialmente en reposo sobre una superficie horizontal. La fuerza horizontal mínima para que empiece a deslizar es $78,4 \text{ N}$. Una vez iniciado el movimiento, bastan 49 N para que siga deslizándose con rapidez constante.

Calcula:

- el coeficiente de rozamiento estático;
- el coeficiente de rozamiento cinético.

Solución desarrollada.

Antes de calcular. El rozamiento estático y el cinético se determinan en situaciones distintas. El estático máximo aparece justo antes de que el bloque empiece a moverse. El cinético aparece una vez que ya desliza, y aquí se identifica porque la rapidez es constante.

De dónde sale la comparación entre rozamiento estático y dinámico. El rozamiento estático no tiene siempre el valor $\mu_s N$; se adapta hasta un máximo:

$$f_s \leq \mu_s N.$$

Solo si la fuerza necesaria supera ese máximo aparece deslizamiento, y entonces se usa $f_k = \mu_k N$.

La normal es:

$$N = mg = 20 \cdot 9,8 = 196 \text{ N}.$$

En el umbral de deslizamiento:

$$f_{s,\text{máx}} = \mu_s N.$$

Entonces:

$$\mu_s = \frac{78,4}{196} = 0,40.$$

Cuando ya desliza con rapidez constante, la fuerza neta es cero:

$$f_k = 49 \text{ N}.$$

Por tanto:

$$\mu_k = \frac{49}{196} = 0,25.$$

$$\mu_s = 0,40$$

$$\mu_k = 0,25$$

Lectura del resultado. Sale $\mu_s > \mu_k$, como suele ocurrir: cuesta más iniciar el deslizamiento que mantenerlo una vez iniciado.

Ejercicio 24. Libro sobre el asiento de un coche

Un libro de masa $m = 4,2 \text{ kg}$ está sobre el asiento horizontal de un automóvil que circula a 90 km/h . El automóvil frena de forma constante y se detiene en 60 m .

Datos:

$$\mu_s = 0,62, \quad \mu_k = 0,50.$$

Calcula:

- si el libro se desliza sobre el asiento;
- la fuerza que ejerce el asiento sobre el libro.

Solución desarrollada.

Antes de calcular. La pregunta no es solo calcular una fuerza: primero hay que decidir si el libro se desliza. Para ello se compara el rozamiento estático necesario para acompañar la frenada con el rozamiento estático máximo disponible.

De dónde sale el criterio de no deslizamiento. El libro frena porque el asiento ejerce rozamiento estático sobre él. La fuerza necesaria para acompañar la desaceleración del coche es

$$f_s = ma.$$

Para que no resbale debe cumplirse que esa fuerza requerida no supere el máximo disponible:

$$ma \leq \mu_s mg.$$

Pasamos la velocidad a unidades del SI:

$$90 \text{ km/h} = 25 \text{ m/s}.$$

La aceleración de frenado se obtiene con:

$$0 = v_0^2 + 2a\Delta x.$$

$$0 = 25^2 + 2a \cdot 60 \Rightarrow a = -5,21 \text{ m/s}^2.$$

La fuerza horizontal necesaria sobre el libro es:

$$f_s = m|a| = 4,2 \cdot 5,21 \approx 21,9 \text{ N}.$$

El rozamiento estático máximo:

$$f_{s,\text{máx}} = \mu_s mg = 0,62 \cdot 4,2 \cdot 9,8 \approx 25,5 \text{ N}.$$

Como $21,9 < 25,5$, el libro no se desliza.

La normal vale:

$$N = mg = 4,2 \cdot 9,8 = 41,2 \text{ N}.$$

La fuerza de contacto que ejerce el asiento tiene componente normal y componente de rozamiento. Su módulo es:

$$F_c = \sqrt{N^2 + f_s^2} = \sqrt{41,2^2 + 21,9^2} \approx 46,6 \text{ N}.$$

El ángulo con la horizontal cumple:

$$\theta = \arctan\left(\frac{41,2}{21,9}\right) \approx 62^\circ.$$

El libro no se desliza.

$$F_c \approx 46,6 \text{ N}$$

$$\theta \approx 62^\circ$$

Lectura del resultado. Como el rozamiento estático máximo es suficiente, el asiento puede frenar al libro sin que haya deslizamiento relativo.

Ejercicio 25. Fuerza oblicua con rozamiento

Un bloque de masa $m = 16 \text{ kg}$ sobre una superficie horizontal con rozamiento es desplazado por una fuerza de 80 N que forma $36,9^\circ$ con la superficie. El coeficiente de rozamiento cinético es $\mu_k = 0,25$.

Calcula la aceleración del bloque.

Solución desarrollada.

Antes de calcular. La fuerza aplicada está inclinada hacia arriba, así que tiene dos efectos simultáneos: tira del bloque hacia delante y, además, aligera el contacto con la superficie. Por eso el rozamiento se calcula con una normal menor que mg .

De dónde sale la fórmula de la aceleración. Primero se halla la normal desde el equilibrio vertical:

$$N + F \sin \theta - mg = 0.$$

Luego el rozamiento es $f_k = \mu_k N$. Finalmente, en horizontal,

$$F \cos \theta - f_k = ma.$$

La expresión final nace de sustituir estas tres relaciones, no de memorizarla.

Descomponemos la fuerza:

$$F_x = F \cos \theta, \quad F_y = F \sin \theta.$$

La normal se reduce por la componente vertical de la fuerza:

$$N = mg - F \sin \theta.$$

El rozamiento vale:

$$f_k = \mu_k N = \mu_k (mg - F \sin \theta).$$

En horizontal:

$$F \cos \theta - f_k = ma.$$

Por tanto:

$$a = \frac{F \cos \theta - \mu_k (mg - F \sin \theta)}{m}.$$

Sustituyendo:

$$a = \frac{80 \cos 36,9^\circ - 0,25(16 \cdot 9,8 - 80 \sin 36,9^\circ)}{16}.$$

$$a \approx 2,3 \text{ m/s}^2.$$

$$a \approx 2,3 \text{ m/s}^2$$

Lectura del resultado. El bloque acelera hacia delante porque la componente horizontal de la fuerza supera al rozamiento cinético.

Ejercicio 26. Plano inclinado sin rozamiento

Un bloque de masa $m = 15 \text{ kg}$ desciende sin rozamiento por un plano inclinado que forma 60° con la horizontal.

Calcula su aceleración.

Solución desarrollada.

Antes de calcular. En un plano inclinado sin rozamiento, la única fuerza que acelera al bloque a lo largo del plano es la componente paralela del peso. La normal no acelera al bloque porque es perpendicular al plano.

De dónde sale $mg \sin \theta$. Al elegir un eje paralelo al plano, el peso se descompone en dos componentes: una perpendicular, compensada por la normal, y otra paralela, que tira del bloque cuesta abajo. Esa componente paralela vale

$$P_{\parallel} = mg \sin \theta.$$

Como no hay rozamiento, $mg \sin \theta = ma$.

En un plano inclinado sin rozamiento, la componente del peso paralela al plano es:

$$P_x = mg \sin \theta.$$

Por la segunda ley:

$$mg \sin \theta = ma.$$

Así:

$$a = g \sin 60^\circ = 9,8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 8,49 \text{ m/s}^2.$$

$$a \approx 8,49 \text{ m/s}^2$$

Lectura del resultado. La masa se cancela: en ausencia de rozamiento, todos los cuerpos descienden por el mismo plano con la misma aceleración.

Ejercicio 27. Plano inclinado con rozamiento

Un bloque de masa $m = 10 \text{ kg}$ se desliza libremente por un plano inclinado de 30° con rozamiento. El coeficiente de rozamiento cinético es $\mu_k = 0,20$.

Calcula la aceleración del bloque.

Solución desarrollada.

Antes de calcular. El bloque baja por el plano, pero el rozamiento apunta hacia arriba del plano. La aceleración no es $g \sin \theta$, sino lo que queda después de restar el efecto del rozamiento cinético.

De dónde sale la aceleración con rozamiento. La normal se obtiene en el eje perpendicular al plano:

$$N = mg \cos \theta.$$

Como el bloque baja, el rozamiento sube por el plano y vale $f_k = \mu_k N$. En el eje paralelo queda

$$mg \sin \theta - \mu_k mg \cos \theta = ma.$$

Tomamos positivo hacia abajo por el plano. La componente del peso que tira hacia abajo es:

$$mg \sin \theta.$$

La normal:

$$N = mg \cos \theta.$$

El rozamiento cinético, opuesto al deslizamiento:

$$f_k = \mu_k mg \cos \theta.$$

Por tanto:

$$ma = mg \sin \theta - \mu_k mg \cos \theta.$$

Cancelamos la masa:

$$a = g(\sin 30^\circ - 0,20 \cos 30^\circ). \\ a \approx 9,8(0,5 - 0,173) = 3,20 \text{ m/s}^2.$$

$$a \approx 3,20 \text{ m/s}^2$$

Lectura del resultado. La aceleración sigue siendo positiva hacia abajo por el plano, pero menor que en el caso sin rozamiento.

Ejercicio 28. Velocidad constante en un plano inclinado rugoso

Un bloque de masa $m = 10$ kg desciende por un plano inclinado de 30° con rozamiento. Calcula el coeficiente de rozamiento cinético para que el bloque descienda con velocidad constante.

Solución desarrollada.

Antes de calcular. Velocidad constante significa aceleración nula. En un plano inclinado rugoso eso ocurre cuando la componente del peso que tira hacia abajo queda exactamente compensada por el rozamiento que apunta hacia arriba.

De dónde sale $\mu_k = \tan \theta$. Velocidad constante significa $a = 0$. La componente paralela del peso y el rozamiento se equilibran:

$$mg \sin \theta = \mu_k mg \cos \theta.$$

Al cancelar mg y dividir por $\cos \theta$ aparece $\mu_k = \tan \theta$.

Si la velocidad es constante:

$$a = 0.$$

Por tanto, en la dirección del plano:

$$mg \sin \theta - f_k = 0.$$

Como:

$$f_k = \mu_k mg \cos \theta,$$

queda:

$$mg \sin \theta = \mu_k mg \cos \theta.$$

Cancelamos mg :

$$\mu_k = \tan \theta.$$

Para $\theta = 30^\circ$:

$$\mu_k = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,577.$$

$$\mu_k \approx 0,577$$

Lectura del resultado. El resultado no depende de la masa: para velocidad constante solo importa la inclinación y el coeficiente de rozamiento.

Ejercicio 29. Subir por un plano inclinado sin rozamiento

Se quiere subir por un plano inclinado de 30° un cuerpo de masa $m = 5$ kg. No hay rozamiento. Calcula la fuerza paralela al plano necesaria para que el cuerpo suba con velocidad constante.

Solución desarrollada.

Antes de calcular. Para subir con velocidad constante no basta con empujar hacia arriba: la fuerza aplicada debe equilibrar exactamente la componente del peso que tira hacia abajo por el plano. Como no hay rozamiento, solo aparece esa oposición.

De dónde sale la fuerza necesaria. Al subir con velocidad constante, la aceleración paralela al plano es cero. La fuerza aplicada hacia arriba debe igualar exactamente la componente del peso hacia abajo:

$$F - mg \sin \theta = 0.$$

Por eso $F = mg \sin \theta$.

Si sube con velocidad constante:

$$a = 0.$$

En la dirección del plano, la fuerza aplicada debe equilibrar la componente del peso:

$$F = mg \sin 30^\circ.$$

Sustituimos:

$$F = 5 \cdot 9,8 \cdot \frac{1}{2} = 24,5 \text{ N}.$$

$$F = 24,5 \text{ N}$$

Lectura del resultado. El resultado es bastante menor que el peso total porque solo hay que compensar la componente del peso paralela al plano.

Ejercicio 30. Subida por plano inclinado con rozamiento

Un cuerpo de masa $m = 25 \text{ kg}$ sube por un plano inclinado de 60° al aplicarle una fuerza paralela al plano de 250 N . Hay rozamiento cinético con coeficiente $\mu_k = 0,20$.

Calcula la aceleración con la que sube el cuerpo.

Solución desarrollada.

Antes de calcular. Ahora el cuerpo sube, por lo que tanto la componente del peso como el rozamiento se oponen al movimiento. El signo correcto sale de elegir positivo hacia arriba del plano y escribir todas las fuerzas con ese criterio.

De dónde sale la ecuación de subida. Con positivo hacia arriba por el plano, la fuerza aplicada entra positiva, mientras que el peso paralelo y el rozamiento entran negativos:

$$F - mg \sin \theta - f_k = ma.$$

Como $f_k = \mu_k mg \cos \theta$, se obtiene la expresión usada para a .

Tomamos positivo hacia arriba del plano. Las fuerzas que se oponen a la subida son la componente del peso y el rozamiento:

$$F - mg \sin \theta - \mu_k mg \cos \theta = ma.$$

Sustituimos:

$$a = \frac{250 - 25 \cdot 9,8 \sin 60^\circ - 0,20 \cdot 25 \cdot 9,8 \cos 60^\circ}{25}.$$

$$a \approx 0,54 \text{ m/s}^2.$$

$$a \approx 0,54 \text{ m/s}^2$$

Lectura del resultado. La aceleración sale positiva con el eje elegido hacia arriba, así que el cuerpo todavía acelera mientras sube.

Bloque D. Sistemas con cuerdas, tensiones y poleas

En sistemas con varios cuerpos conviene elegir un sentido positivo coherente con el movimiento esperado. Las cuerdas y poleas ideales permiten relacionar aceleraciones y tensiones.

Ejercicio 31. Máquina de Atwood

Dos masas, $m_1 = 2 \text{ kg}$ y $m_2 = 3 \text{ kg}$, cuelgan de los extremos de una cuerda ideal que pasa por una polea ideal.

Calcula la aceleración del sistema y la tensión de la cuerda.

Solución desarrollada.

Antes de calcular. En una máquina de Atwood ideal, las dos masas comparten el mismo módulo de aceleración y la cuerda tiene la misma tensión en ambos lados. Conviene estudiar primero el sistema completo para hallar a y después un solo bloque para hallar T .

De dónde sale la ecuación de Atwood. Si se estudia el sistema completo, la tensión aparece dos veces con sentidos opuestos y se cancela porque es interna. La fuerza externa que desequilibra el sistema es la diferencia de pesos:

$$(m_2 - m_1)g = (m_1 + m_2)a.$$

Luego se recupera la tensión aislando una de las masas.

Como $m_2 > m_1$, la masa m_2 baja y la masa m_1 sube.

Para el sistema completo:

$$m_2g - m_1g = (m_1 + m_2)a.$$

Así:

$$a = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2} = \frac{(3 - 2)9,8}{5} = 1,96 \text{ m/s}^2.$$

Para m_1 :

$$T - m_1g = m_1a.$$

Entonces:

$$T = m_1(g + a) = 2(9,8 + 1,96) = 23,52 \text{ N}.$$

$$a = 1,96 \text{ m/s}^2$$

$$T = 23,52 \text{ N}$$

Lectura del resultado. La tensión no es igual al peso de ninguna de las dos masas porque ambas están acelerando.

Ejercicio 32. Mesa sin rozamiento y masa colgante

Un cuerpo de 5 kg situado sobre una mesa horizontal sin rozamiento está unido mediante una cuerda y una polea ideales a otro cuerpo de 10 kg que cuelga.

Calcula la aceleración del sistema y la tensión de la cuerda.

Solución desarrollada.

Antes de calcular. La masa colgante es la que proporciona la fuerza externa que arrastra al conjunto. Si se estudia el sistema completo, la tensión es interna y se cancela; por eso la aceleración se obtiene de forma limpia.

De dónde sale la aceleración del sistema mesa-colgante. La tensión es interna si se estudian los dos cuerpos juntos. En ausencia de rozamiento, la única fuerza externa que tira del conjunto en la dirección del movimiento es el peso de la masa colgante:

$$m_2 g = (m_1 + m_2) a.$$

Después, para hallar T , se aísla el bloque de la mesa: $T = m_1 a$.

La masa colgante tira del sistema. Para el conjunto:

$$m_2 g = (m_1 + m_2) a.$$

Por tanto:

$$a = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2} = \frac{10 \cdot 9,8}{5 + 10} = 6,53 \text{ m/s}^2.$$

Para el bloque sobre la mesa:

$$T = m_1 a = 5 \cdot 6,53 = 32,67 \text{ N}.$$

$$a \approx 6,53 \text{ m/s}^2$$

$$T \approx 32,7 \text{ N}$$

Lectura del resultado. La tensión es menor que el peso de la masa colgante porque parte de ese peso se emplea en acelerar el sistema completo.

Ejercicio 33. Mesa rugosa y masa colgante desconocida

Un bloque de masa $m_1 = 5 \text{ kg}$ está sobre una superficie rugosa y unido mediante una cuerda y una polea ideales a un bloque colgante de masa desconocida m_2 .

El coeficiente de rozamiento cinético es $\mu_k = 0,20$ y la aceleración del sistema es $a = 0,5 \text{ m/s}^2$.

Calcula:

- la masa del bloque colgante;
- la tensión de la cuerda.

Solución desarrollada.

Antes de calcular. Aquí la masa colgante no se conoce, pero sí se conoce la aceleración. Se empieza por el bloque sobre la mesa para encontrar la tensión, porque en ese bloque todos los demás datos son conocidos. Después se usa la ecuación de la masa colgante.

De dónde salen las dos ecuaciones. En el bloque de la mesa actúan tensión hacia delante y rozamiento hacia atrás:

$$T - f_k = m_1 a.$$

En la masa colgante actúan peso hacia abajo y tensión hacia arriba:

$$m_2 g - T = m_2 a.$$

Como la aceleración se conoce, estas dos ecuaciones permiten hallar T y luego m_2 .

El rozamiento sobre m_1 es:

$$f_k = \mu_k m_1 g = 0,20 \cdot 5 \cdot 9,8 = 9,8 \text{ N}.$$

Para el bloque de la mesa:

$$T - f_k = m_1 a.$$

Luego:

$$T = m_1 a + f_k = 5 \cdot 0,5 + 9,8 = 12,3 \text{ N.}$$

Para la masa colgante:

$$m_2 g - T = m_2 a.$$

Despejamos:

$$m_2(g - a) = T.$$

$$m_2 = \frac{T}{g - a} = \frac{12,3}{9,8 - 0,5} \approx 1,32 \text{ kg.}$$

$$m_2 \approx 1,32 \text{ kg}$$

$$T \approx 12,3 \text{ N}$$

Lectura del resultado. La masa colgante resulta pequeña porque la aceleración impuesta es pequeña y parte de su peso se dedica a vencer el rozamiento.

Ejercicio 34. Tres masas y dos poleas

Un sistema está formado por tres cuerpos. El cuerpo central, de masa $m_2 = 20 \text{ kg}$, está sobre una mesa horizontal rugosa. A la izquierda cuelga una masa $m_1 = 4 \text{ kg}$ y a la derecha cuelga una masa $m_3 = 15 \text{ kg}$, unidas mediante dos cuerdas y dos poleas ideales. El coeficiente de rozamiento cinético sobre la mesa es $\mu_k = 0,25$.

Calcula la aceleración del sistema y las dos tensiones.

Solución desarrollada.

Antes de calcular. El bloque de la mesa está tirado por dos cuerdas y además sufre rozamiento. Para hallar la aceleración conviene estudiar el sistema completo: las tensiones son internas y desaparecen. Para hallar cada tensión, luego se aísla cada masa colgante.

De dónde sale la ecuación del sistema completo. Al sumar las ecuaciones de los tres cuerpos, las tensiones de las cuerdas se cancelan porque son internas. Quedan como fuerzas externas los pesos colgantes que compiten y el rozamiento de la masa central:

$$m_3 g - m_1 g - f_k = (m_1 + m_2 + m_3) a.$$

Las tensiones se calculan después aislando cada masa colgante.

El sistema se mueve hacia el lado de la masa de 15 kg. La fuerza de rozamiento sobre el bloque central se opone al movimiento:

$$f_k = \mu_k m_2 g.$$

Para el sistema completo:

$$m_3 g - m_1 g - \mu_k m_2 g = (m_1 + m_2 + m_3) a.$$

Entonces:

$$a = \frac{g(m_3 - m_1 - \mu_k m_2)}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Sustituimos:

$$a = \frac{9,8(15 - 4 - 0,25 \cdot 20)}{4 + 20 + 15} \approx 1,5 \text{ m/s}^2.$$

La tensión de la cuerda izquierda:

$$T_A = m_1(g + a) = 4(9,8 + 1,5) = 45,2 \text{ N.}$$

La tensión de la cuerda derecha:

$$T_B = m_3(g - a) = 15(9,8 - 1,5) = 124,5 \text{ N.}$$

$$a \approx 1,5 \text{ m/s}^2$$

$$T_A \approx 45,2 \text{ N}$$

$$T_B \approx 124,5 \text{ N}$$

Lectura del resultado. Las dos tensiones no tienen por qué ser iguales porque pertenecen a cuerdas distintas y cada una está asociada a una masa colgante diferente.

Ejercicio 35. Plano inclinado y cuerpo colgante

Dos cuerpos están unidos por una cuerda y una polea ideales. El cuerpo $m_1 = 30 \text{ kg}$ está sobre un plano inclinado de 30° con rozamiento cinético $\mu_k = 0,20$. El otro cuerpo, $m_2 = 25 \text{ kg}$, cuelga verticalmente. Calcula la aceleración del sistema y la tensión de la cuerda.

Solución desarrollada.

Antes de calcular. Antes de escribir ecuaciones hay que decidir el sentido probable del movimiento. La masa colgante tiende a bajar y arrastra al bloque del plano hacia arriba. El rozamiento del bloque del plano se opone a esa subida.

De dónde sale la ecuación del sistema. Se toma como positivo que la masa colgante baje y el bloque del plano suba. Entonces tira a favor m_2g ; se oponen la componente del peso del bloque sobre el plano y su rozamiento:

$$m_2g - m_1g \sin \theta - \mu_k m_1g \cos \theta = (m_1 + m_2)a.$$

Suponemos que m_2 baja y que m_1 sube por el plano. El rozamiento sobre m_1 se opone a la subida. Para el sistema:

$$m_2g - m_1g \sin \theta - \mu_k m_1g \cos \theta = (m_1 + m_2)a.$$

Sustituimos:

$$a = \frac{25 \cdot 9,8 - 30 \cdot 9,8 \sin 30^\circ - 0,20 \cdot 30 \cdot 9,8 \cos 30^\circ}{30 + 25}.$$

$$a \approx 0,86 \text{ m/s}^2.$$

Para la masa colgante:

$$m_2g - T = m_2a.$$

$$T = m_2(g - a) = 25(9,8 - 0,86) \approx 224 \text{ N.}$$

$$a \approx 0,86 \text{ m/s}^2$$

$$T \approx 224 \text{ N}$$

Lectura del resultado. La aceleración positiva confirma la hipótesis: la masa colgante baja y el bloque de 30 kg sube por el plano.

Ejercicio 36. Dos bloques en planos inclinados con rozamiento

Dos bloques están unidos por una cuerda y una polea ideales. El bloque $m_1 = 40 \text{ kg}$ está sobre un plano inclinado de 53° y el bloque $m_2 = 300 \text{ kg}$ sobre otro plano inclinado de 37° . Hay rozamiento cinético con coeficiente $\mu_k = 0,30$ en ambos planos.

Calcula la aceleración del sistema y la tensión de la cuerda.

Solución desarrollada.

Antes de calcular. Los dos bloques están en planos distintos, así que hay que comparar las componentes del peso a lo largo de cada plano y los rozamientos. El bloque pesado domina el movimiento, pero el rozamiento de ambos planos reduce la aceleración.

De dónde sale la fuerza neta externa. Cada bloque tiene una componente del peso paralela a su plano. El bloque de 300 kg domina, así que se toma como positivo su descenso. En ese sentido, su peso paralelo entra positivo; el peso paralelo del otro bloque y ambos rozamientos entran negativos.

El bloque de 300 kg tiende a bajar por su plano y arrastra al otro bloque hacia arriba por el suyo. Tomamos ese sentido como positivo.

La fuerza neta externa en la dirección del movimiento es:

$$m_2 g \sin 37^\circ - \mu_k m_2 g \cos 37^\circ - m_1 g \sin 53^\circ - \mu_k m_1 g \cos 53^\circ.$$

Por tanto:

$$a = \frac{m_2 g \sin 37^\circ - \mu_k m_2 g \cos 37^\circ - m_1 g \sin 53^\circ - \mu_k m_1 g \cos 53^\circ}{m_1 + m_2}.$$

Usando $\sin 37^\circ \approx 0,60$, $\cos 37^\circ \approx 0,80$, $\sin 53^\circ \approx 0,80$ y $\cos 53^\circ \approx 0,60$:

$$a \approx 1,98 \text{ m/s}^2.$$

Para el bloque m_1 :

$$T - m_1 g \sin 53^\circ - \mu_k m_1 g \cos 53^\circ = m_1 a.$$

$$T \approx 40 \cdot 9,8 \cdot 0,80 + 0,30 \cdot 40 \cdot 9,8 \cdot 0,60 + 40 \cdot 1,98.$$

$$T \approx 463 \text{ N}.$$

$$a \approx 1,98 \text{ m/s}^2$$

$$T \approx 463 \text{ N}$$

Lectura del resultado. La tensión obtenida es grande porque debe arrastrar al bloque de 40 kg contra la componente de su peso y contra el rozamiento.

Ejercicio 37. Polea fija y polea móvil

Un sistema está formado por una polea fija, una polea móvil y una carga de masa $m = 40 \text{ kg}$ que cuelga de la polea móvil. Se tira del extremo libre de la cuerda hacia abajo con una fuerza de $F = 250 \text{ N}$.

Calcula:

- la tensión de la cuerda;
- la aceleración de la carga;
- la fuerza necesaria para elevar la carga con velocidad constante;
- la distancia que debe desplazarse el extremo libre para elevar la carga 0,5 m.

Solución desarrollada.

Antes de calcular. La polea móvil introduce una ventaja mecánica: la carga queda sostenida por dos tramos de cuerda. Por eso la fuerza ascendente sobre la carga no es T , sino $2T$. La contrapartida es que el extremo libre recorre el doble de distancia.

De dónde sale el factor 2. La polea móvil está sostenida por dos tramos de cuerda, cada uno con tensión T . Por eso la fuerza total ascendente sobre la carga es $2T$. La ecuación dinámica no es $T - mg = ma$, sino

$$2T - mg = ma.$$

La misma geometría de cuerda explica que el extremo libre recorra el doble de distancia que la carga.

En una cuerda ideal, la tensión coincide con la fuerza aplicada:

$$T = 250 \text{ N}.$$

La polea móvil sostiene la carga con dos tramos de cuerda:

$$2T - mg = ma.$$

Entonces:

$$a = \frac{2T - mg}{m} = \frac{2 \cdot 250 - 40 \cdot 9,8}{40} = 2,7 \text{ m/s}^2.$$

Para elevar a velocidad constante:

$$a = 0 \Rightarrow 2T = mg.$$

$$T = \frac{mg}{2} = \frac{40 \cdot 9,8}{2} = 196 \text{ N}.$$

Como el extremo libre se desplaza el doble que la carga:

$$d = 2h = 2 \cdot 0,5 = 1 \text{ m}.$$

$$T = 250 \text{ N}$$

$$a = 2,7 \text{ m/s}^2$$

$$F_{vcte} = 196 \text{ N}$$

$$d = 1 \text{ m}$$

Lectura del resultado. La ventaja mecánica reduce la fuerza necesaria, pero exige tirar de más cuerda: fuerza y desplazamiento se compensan idealmente.

Bloque E. Movimiento circular, fuerza centrípeta y equilibrio con fuerzas

La fuerza centrípeta no es una fuerza nueva: es el papel que desempeña la resultante radial. Puede ser tensión, rozamiento, normal, una fuerza eléctrica o una combinación de varias fuerzas.

Ejercicio 38. Movimiento circular sobre una mesa

Un bloque de masa $m = 2 \text{ kg}$ se mueve sobre una mesa horizontal sin rozamiento, unido mediante una cuerda a un punto fijo. Describe una circunferencia de radio $r = 0,5 \text{ m}$ con rapidez $v = 3 \text{ m/s}$.

Calcula:

- la aceleración centrípeta;
- la fuerza centrípeta;
- la tensión de la cuerda.

Solución desarrollada.

Antes de calcular. En movimiento circular uniforme, la rapidez puede ser constante y aun así haber aceleración. La aceleración centrípeta cambia la dirección de la velocidad y apunta hacia el centro. En este caso la tensión es la fuerza centrípeta.

De dónde sale la tensión centrípeta. La aceleración centrípeta es una aceleración geométrica del movimiento circular:

$$a_c = \frac{v^2}{r}.$$

En la mesa sin rozamiento, la única fuerza radial real es la tensión; por eso $T = ma_c$. No se añade otra fuerza llamada centrípeta: centrípeta es la resultante radial.

La aceleración centrípeta es:

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{3^2}{0,5} = 18 \text{ m/s}^2.$$

La fuerza centrípeta:

$$F_c = ma_c = 2 \cdot 18 = 36 \text{ N}.$$

En este caso la tensión de la cuerda proporciona la fuerza centrípeta:

$$T = F_c = 36 \text{ N}.$$

$$a_c = 18 \text{ m/s}^2$$

$$F_c = 36 \text{ N}$$

$$T = 36 \text{ N}$$

Lectura del resultado. La tensión apunta hacia el centro, no en la dirección del movimiento. No acelera aumentando la rapidez, sino cambiando la dirección de la velocidad.

Ejercicio 39. Automóvil en una curva horizontal

Un automóvil de masa $m = 1000 \text{ kg}$ toma una curva horizontal de radio $r = 50 \text{ m}$ con rapidez $v = 10 \text{ m/s}$. Calcula:

- la aceleración centrípeta;
- la fuerza de rozamiento necesaria;
- el coeficiente mínimo de rozamiento estático para que no derrape.

Solución desarrollada.

Antes de calcular. En una curva horizontal plana, la fuerza que permite girar no es una fuerza misteriosa hacia el centro: es el rozamiento estático entre neumáticos y carretera. Si el rozamiento máximo no alcanza, el coche derrapa.

De dónde sale el coeficiente mínimo. En una curva horizontal, la normal y el peso se compensan verticalmente, así que $N = mg$. La fuerza radial necesaria es mv^2/r y la proporciona el rozamiento estático. El umbral de no derrapar es

$$\frac{mv^2}{r} = \mu_s mg.$$

De ahí sale el coeficiente mínimo.

La aceleración centrípeta:

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{10^2}{50} = 2 \text{ m/s}^2.$$

La fuerza centrípeta la proporciona el rozamiento estático:

$$f_s = ma_c = 1000 \cdot 2 = 2000 \text{ N}.$$

La normal vale:

$$N = mg = 1000 \cdot 9,8 = 9800 \text{ N}.$$

Para no derrapar:

$$f_s \leq \mu_s N.$$

Luego:

$$\mu_{s,\text{mín}} = \frac{2000}{9800} \approx 0,204.$$

$$a_c = 2 \text{ m/s}^2$$

$$f_s = 2000 \text{ N}$$

$$\mu_{s,\text{mín}} \approx 0,204$$

Lectura del resultado. El coeficiente mínimo indica el umbral: con menos rozamiento estático disponible, el coche no podría mantener esa curva a esa rapidez.

Ejercicio 40. Curva peraltada sin rozamiento

Un automóvil de masa $m = 800 \text{ kg}$ toma una curva peraltada de 30° y radio $r = 40 \text{ m}$. No hay rozamiento. Calcula:

- la fuerza normal que ejerce la carretera;
- la rapidez con la que puede tomar la curva.

Solución desarrollada.

Antes de calcular. En una curva peraltada sin rozamiento, la normal se inclina. Su componente vertical sostiene el peso y su componente horizontal proporciona la fuerza centrípeta. Dividir ambas ecuaciones elimina la normal y deja la rapidez.

De dónde sale $v = \sqrt{rg \tan \theta}$. No se memoriza: sale de proyectar la normal. En vertical,

$$N \cos \theta = mg.$$

En radial,

$$N \sin \theta = m \frac{v^2}{r}.$$

Al dividir la ecuación radial entre la vertical se elimina N y queda $\tan \theta = v^2/(rg)$.

En vertical no hay aceleración:

$$N \cos \theta = mg.$$

Luego:

$$N = \frac{mg}{\cos 30^\circ} = \frac{800 \cdot 9,8}{\cos 30^\circ} \approx 9053 \text{ N}.$$

En horizontal, la componente de la normal proporciona la fuerza centrípeta:

$$N \sin \theta = m \frac{v^2}{r}.$$

Al dividir las ecuaciones:

$$\tan \theta = \frac{v^2}{rg}.$$

Por tanto:

$$v = \sqrt{rg \tan \theta} = \sqrt{40 \cdot 9,8 \tan 30^\circ} \approx 15 \text{ m/s}.$$

$$N \approx 9053 \text{ N}$$

$$v \approx 15 \text{ m/s}$$

Lectura del resultado. La rapidez hallada es la única compatible con ese peralte sin rozamiento para ese radio.

Ejercicio 41. Curva peraltada con rozamiento

Un automóvil negocia una curva de radio $r = 50 \text{ m}$, con peralte de 20° y coeficiente de rozamiento $\mu = 0,35$. Calcula la rapidez máxima con la que puede tomar la curva sin derrapar.

Solución desarrollada.

Idea física. No vamos a usar una fórmula prefabricada. La rapidez máxima sale de proyectar las fuerzas reales: peso, normal y rozamiento estático. Para la rapidez máxima, el coche tendería a subir por el peralte, así que el rozamiento estático apunta cuesta abajo del plano.

Las fuerzas sobre el coche son:

- el peso mg , vertical hacia abajo;
- la normal N , perpendicular a la carretera;
- el rozamiento estático f_s , paralelo a la carretera.

En el caso límite de rapidez máxima:

$$f_s = \mu N.$$

Elegimos dos direcciones: vertical y horizontal hacia el centro de la curva.

Ecuación vertical. El coche no acelera verticalmente. La normal tiene componente vertical hacia arriba $N \cos \theta$. El rozamiento, al apuntar cuesta abajo del plano, tiene componente vertical hacia abajo $f_s \sin \theta$. Por

tanto:

$$N \cos \theta - f_s \sin \theta - mg = 0.$$

Sustituyendo $f_s = \mu N$:

$$N \cos \theta - \mu N \sin \theta = mg.$$

Sacamos factor común N :

$$N(\cos \theta - \mu \sin \theta) = mg.$$

De aquí:

$$N = \frac{mg}{\cos \theta - \mu \sin \theta}.$$

Ecuación radial. La aceleración centrípeta apunta hacia el centro de la curva. Hacia el centro contribuyen la componente horizontal de la normal, $N \sin \theta$, y la componente horizontal del rozamiento, $f_s \cos \theta$:

$$N \sin \theta + f_s \cos \theta = m \frac{v^2}{r}.$$

Sustituyendo $f_s = \mu N$:

$$N \sin \theta + \mu N \cos \theta = m \frac{v^2}{r}.$$

Sacamos factor común:

$$N(\sin \theta + \mu \cos \theta) = m \frac{v^2}{r}.$$

Ahora sustituimos el valor de N obtenido en la ecuación vertical:

$$\frac{mg}{\cos \theta - \mu \sin \theta} (\sin \theta + \mu \cos \theta) = m \frac{v^2}{r}.$$

La masa se simplifica:

$$\frac{g(\sin \theta + \mu \cos \theta)}{\cos \theta - \mu \sin \theta} = \frac{v^2}{r}.$$

Multiplicando por r :

$$v^2 = rg \frac{\sin \theta + \mu \cos \theta}{\cos \theta - \mu \sin \theta}.$$

Y, por tanto:

$$v_{\text{máx}} = \sqrt{rg \frac{\sin \theta + \mu \cos \theta}{\cos \theta - \mu \sin \theta}}.$$

Sustituimos los datos:

$$v_{\text{máx}} = \sqrt{50 \cdot 9,8 \frac{\sin 20^\circ + 0,35 \cos 20^\circ}{\cos 20^\circ - 0,35 \sin 20^\circ}}.$$

$$v_{\text{máx}} \approx 20,0 \text{ m/s}.$$

$v_{\text{máx}} \approx 20,0 \text{ m/s}$

Lectura del resultado. Esta no es una fórmula universal para cualquier curva: corresponde al caso de rapidez máxima, con rozamiento cuesta abajo por el peralte. Si se estudiara la rapidez mínima, el rozamiento cambiaría de sentido y también cambiarían los signos.

Ejercicio 42. Péndulo cónico

Una bola de masa $m = 2 \text{ kg}$ está suspendida de una cuerda de longitud $L = 1 \text{ m}$. La bola describe una circunferencia horizontal de radio $r = 0,6 \text{ m}$ con rapidez constante. Calcula:

- a) la dirección y el módulo de la aceleración;
- b) la tensión de la cuerda;
- c) la rapidez de la bola.

Solución desarrollada.

Antes de calcular. En un péndulo cónico, la cuerda no está vertical porque la tensión debe tener dos componentes: una vertical que equilibra el peso y otra horizontal que actúa como fuerza centrípeta.

De dónde sale la relación del péndulo cónico. Las fuerzas reales son el peso y la tensión. La componente vertical de la tensión equilibra el peso:

$$T \cos \theta = mg.$$

La componente horizontal proporciona la fuerza radial:

$$T \sin \theta = m \frac{v^2}{r}.$$

Al dividir la segunda entre la primera se obtiene $\tan \theta = v^2/(rg)$.

Del triángulo geométrico:

$$\sin \theta = \frac{r}{L} = 0,6.$$

Entonces:

$$\theta \approx 36,9^\circ, \quad \tan \theta \approx 0,75.$$

En el péndulo cónico:

$$\tan \theta = \frac{v^2}{rg}.$$

Por tanto:

$$v = \sqrt{rg \tan \theta} \approx \sqrt{0,6 \cdot 9,8 \cdot 0,75} \approx 2,1 \text{ m/s}.$$

La tensión cumple:

$$T \sin \theta = m \frac{v^2}{r}.$$

Así:

$$T = \frac{mv^2}{r \sin \theta} \approx 24,4 \text{ N}.$$

La aceleración es centrípeta:

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{2,1^2}{0,6} \approx 7,35 \text{ m/s}^2.$$

$$a_c \approx 7,35 \text{ m/s}^2 \text{ hacia el centro}$$

$$T \approx 24,4 \text{ N}$$

$$v \approx 2,1 \text{ m/s}$$

Lectura del resultado. La aceleración es horizontal hacia el centro de la circunferencia; no apunta a lo largo de la cuerda.

Ejercicio 43. Circunferencia vertical

Un bloque de masa $m = 1 \text{ kg}$ está atado a una cuerda de longitud $r = 0,6 \text{ m}$ y gira en una circunferencia vertical a 60 revoluciones por minuto.
Calcula la tensión de la cuerda:

- a) en el punto más alto;
- b) en el punto más bajo.

Solución desarrollada.

Antes de calcular. En una circunferencia vertical, el centro cambia de dirección según el punto. Arriba, peso y tensión apuntan hacia el centro; abajo, la tensión apunta hacia el centro y el peso en sentido contrario. Por eso las tensiones son distintas.

De dónde salen las tensiones arriba y abajo. La ecuación radial siempre apunta hacia el centro. Arriba, hacia el centro apuntan tensión y peso:

$$T_{arriba} + mg = m\omega^2 r.$$

Abajo, hacia el centro apunta la tensión, pero el peso apunta en sentido contrario:

$$T_{abajo} - mg = m\omega^2 r.$$

La velocidad angular es:

$$60 \text{ rpm} = 1 \text{ vuelta/s} = 2\pi \text{ rad/s.}$$

En el punto más alto, tanto la tensión como el peso apuntan hacia el centro:

$$T_{arriba} + mg = m\omega^2 r.$$

Por tanto:

$$T_{arriba} = m(\omega^2 r - g).$$

$$T_{arriba} = 1 \left((2\pi)^2 \cdot 0,6 - 9,8 \right) \approx 13,9 \text{ N.}$$

En el punto más bajo:

$$T_{abajo} - mg = m\omega^2 r.$$

Entonces:

$$T_{abajo} = m(g + \omega^2 r) \approx 33,5 \text{ N.}$$

$$T_{arriba} \approx 13,9 \text{ N}$$

$$T_{abajo} \approx 33,5 \text{ N}$$

Lectura del resultado. La tensión es mayor abajo porque allí la cuerda debe vencer al peso y además producir la aceleración centrípeta hacia arriba.

Ejercicio 44. Dos cuerdas y barra vertical giratoria

Un bloque de masa $m = 8 \text{ kg}$ está sujeto a una barra vertical mediante dos cuerdas iguales de longitud $2,6 \text{ m}$. Los puntos de sujeción en la barra están separados $2,4 \text{ m}$, de modo que el bloque queda a mitad de altura entre ambos puntos. El sistema gira alrededor de la barra.

Se desea que la tensión de la cuerda superior sea $T_1 = 250 \text{ N}$.

Calcula:

- a) la tensión de la cuerda inferior;
- b) las revoluciones por minuto del sistema.

Solución desarrollada.

Antes de calcular. La geometría manda: primero se obtiene el radio de la trayectoria y los senos y cosenos de las cuerdas. Después se separan las ecuaciones vertical y horizontal: la vertical relaciona las tensiones; la horizontal fija la velocidad angular.

De dónde salen las ecuaciones de las dos cuerdas. Cada tensión se descompone en una componente vertical y otra horizontal. En vertical no hay aceleración:

$$T_1 \sin \theta - T_2 \sin \theta - mg = 0.$$

En horizontal, las dos componentes apuntan hacia la barra y producen la aceleración radial:

$$(T_1 + T_2) \cos \theta = m\omega^2 r.$$

La mitad de la separación vertical es:

$$1,2 \text{ m.}$$

El radio de la trayectoria es:

$$r = \sqrt{2,6^2 - 1,2^2} \approx 2,3 \text{ m.}$$

De la geometría:

$$\sin \theta = \frac{1,2}{2,6}, \quad \cos \theta = \frac{2,3}{2,6}.$$

En vertical:

$$T_1 \sin \theta - T_2 \sin \theta - mg = 0.$$

Por tanto:

$$T_2 = T_1 - \frac{mg}{\sin \theta}.$$

$$T_2 \approx 250 - \frac{8 \cdot 9,8}{1,2/2,6} \approx 80,1 \text{ N.}$$

En horizontal:

$$(T_1 + T_2) \cos \theta = m\omega^2 r.$$

Con $\cos \theta = r/2,6$, queda:

$$\omega = \sqrt{\frac{(T_1 + T_2)}{m \cdot 2,6}}.$$

$$\omega \approx 3,98 \text{ rad/s.}$$

Pasamos a revoluciones por minuto:

$$\text{rpm} = \omega \frac{60}{2\pi} \approx 38.$$

$$T_2 \approx 80,1 \text{ N}$$

$$\omega \approx 3,98 \text{ rad/s}$$

$$38 \text{ rpm}$$

Lectura del resultado. La tensión inferior sale menor que la superior porque la cuerda superior debe ayudar a sostener el peso.

Ejercicio 45. Sillas voladoras

Una atracción de feria de sillas voladoras tiene una plataforma circular de radio 4 m. De ella cuelga una silla mediante una cadena de longitud 2,5 m. La silla y la persona tienen masa conjunta 50 kg. Cuando gira, la cadena forma un ángulo de 28° con la vertical.

Calcula:

- a) la velocidad angular de rotación;

b) la tensión de la cadena.

Solución desarrollada.

Antes de calcular. La silla no gira alrededor del eje de la cadena, sino alrededor del eje central de la atracción. Por eso el radio de giro es el radio de la plataforma más la proyección horizontal de la cadena.

De dónde sale la velocidad angular. La silla es un péndulo cónico cuyo radio real de giro es $R + L \sin \theta$. La tensión cumple

$$T \cos \theta = mg, \quad T \sin \theta = m\omega^2 r.$$

Al dividir ambas ecuaciones se obtiene $\tan \theta = \omega^2 r / g$.

El radio de la circunferencia descrita por la silla es:

$$r = 4 + 2,5 \sin 28^\circ.$$

$$r \approx 4 + 1,17 = 5,17 \text{ m.}$$

En un péndulo cónico:

$$\tan \theta = \frac{\omega^2 r}{g}.$$

Por tanto:

$$\omega = \sqrt{\frac{g \tan \theta}{r}}.$$

Sustituimos:

$$\omega = \sqrt{\frac{9,8 \tan 28^\circ}{5,17}} \approx 1,0 \text{ rad/s.}$$

En vertical:

$$T \cos \theta = mg.$$

Así:

$$T = \frac{mg}{\cos 28^\circ} = \frac{50 \cdot 9,8}{\cos 28^\circ} \approx 555 \text{ N.}$$

$$\omega \approx 1,0 \text{ rad/s}$$

$$T \approx 555 \text{ N}$$

Lectura del resultado. La tensión es mayor que el peso porque su componente vertical vale mg , pero la tensión completa también tiene componente horizontal.

Ejercicio 46. Resorte en movimiento circular

Un cuerpo de masa $m = 1 \text{ kg}$ se une a un resorte ideal de longitud natural $l_0 = 0,48 \text{ m}$ y constante elástica $k = 1000 \text{ N/m}$. El sistema gira como un péndulo cónico a 60 revoluciones por minuto.

Calcula:

- el alargamiento del resorte;
- el ángulo que forma el resorte con la vertical.

Solución desarrollada.

Idea física. El resorte no solo sostiene el peso: también proporciona la fuerza radial necesaria para el movimiento circular. La clave es no escribir directamente una fórmula final, sino proyectar la tensión elástica del resorte.

La frecuencia de giro es 60 revoluciones por minuto, es decir, una vuelta por segundo:

$$f = 1 \text{ Hz.}$$

Por tanto, la velocidad angular es:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \text{ rad/s.}$$

Llamamos x al alargamiento del resorte. Entonces la longitud real del resorte durante el giro es:

$$l = l_0 + x.$$

La tensión elástica viene dada por la ley de Hooke:

$$T = kx.$$

Si el resorte forma un ángulo θ con la vertical, el radio de la circunferencia descrita por la masa es:

$$r = l \sin \theta = (l_0 + x) \sin \theta.$$

Ahora proyectamos la tensión.

Eje vertical. No hay aceleración vertical, así que la componente vertical de la tensión equilibra el peso:

$$T \cos \theta = mg.$$

Eje radial. La componente horizontal de la tensión proporciona la fuerza centrípeta:

$$T \sin \theta = m\omega^2 r.$$

Sustituimos $r = (l_0 + x) \sin \theta$:

$$T \sin \theta = m\omega^2 (l_0 + x) \sin \theta.$$

Como el movimiento circular tiene radio distinto de cero, $\sin \theta \neq 0$, y podemos simplificar:

$$T = m\omega^2 (l_0 + x).$$

Pero $T = kx$, por tanto:

$$kx = m\omega^2 (l_0 + x).$$

Ahora sí aparece la ecuación del alargamiento, pero ya deducida desde las fuerzas.

Despejamos x :

$$kx = m\omega^2 l_0 + m\omega^2 x.$$

$$x(k - m\omega^2) = m\omega^2 l_0.$$

$$x = \frac{m\omega^2 l_0}{k - m\omega^2}.$$

Sustituimos:

$$x = \frac{1(2\pi)^2 \cdot 0,48}{1000 - 1(2\pi)^2} \approx 0,0197 \text{ m.}$$

Por tanto:

$$x \approx 2,0 \text{ cm.}$$

La tensión vale:

$$T = kx \approx 1000 \cdot 0,0197 \approx 19,7 \text{ N.}$$

Para hallar el ángulo usamos la ecuación vertical:

$$T \cos \theta = mg.$$

Así:

$$\cos \theta = \frac{mg}{T} \approx \frac{9,8}{19,7} \approx 0,497.$$

$$\theta \approx 60,2^\circ.$$

$$x \approx 0,0197 \text{ m} \approx 2,0 \text{ cm}$$

$$\theta \approx 60,2^\circ$$

Lectura del resultado. La ecuación $kx = m\omega^2(l_0 + x)$ no se memoriza: sale de la componente radial de la tensión y de la geometría del radio de giro. El giro rápido exige una componente horizontal grande, por eso el ángulo es elevado.

Ejercicio 47. Autobús sobre un puente circular

Un autobús de 10 toneladas cruza un puente de trazado circular de radio 70 m con velocidad 15 m/s. Calcula la reacción de la estructura del puente al paso del autobús.

Solución desarrollada.

Antes de calcular. En la cima de un puente circular, la aceleración centrípeta apunta hacia abajo. El peso tira hacia abajo y la normal hacia arriba, de modo que la normal es menor que el peso. Eso explica que el autobús “pese menos” sobre el puente en ese punto.

De dónde sale la reacción sobre el puente. En la cima, la aceleración radial apunta hacia abajo. Por eso, tomando hacia abajo como positivo radial,

$$mg - N = m \frac{v^2}{r}.$$

La normal se resta porque apunta hacia arriba, en sentido contrario al centro de curvatura.

La masa del autobús es:

$$m = 10000 \text{ kg}.$$

En la cima del puente, el centro de curvatura está hacia abajo. Tomamos hacia abajo como sentido centrípeto:

$$mg - N = m \frac{v^2}{r}.$$

Despejamos:

$$N = m \left(g - \frac{v^2}{r} \right).$$

Sustituimos:

$$N = 10000 \left(9,8 - \frac{15^2}{70} \right).$$

$$N \approx 65857 \text{ N}.$$

$$N \approx 6,59 \cdot 10^4 \text{ N}$$

La reacción sobre el autobús tiene ese módulo hacia arriba; el autobús ejerce sobre el puente una fuerza igual y opuesta.

Lectura del resultado. La fuerza que recibe el puente por parte del autobús tiene el mismo módulo que la normal, pero sentido opuesto, por la tercera ley de Newton.

Ejercicio 48. Masa colgante y cuerpo que gira sobre una mesa

Dos cuerpos están unidos por una cuerda que pasa por un agujero de una mesa. El cuerpo que está sobre la mesa tiene masa $m_2 = 200$ g y gira con radio $r = 25$ cm a razón de una vuelta por segundo. El otro cuerpo cuelga y el sistema está en equilibrio.

Calcula la masa colgante.

Solución desarrollada.

Antes de calcular. La cuerda transmite la misma tensión a los dos cuerpos. Para el cuerpo que gira, esa tensión es centrípeta; para el cuerpo colgante, esa misma tensión equilibra su peso. Igualar ambas expresiones permite hallar la masa colgante.

De dónde sale la masa colgante. La misma cuerda transmite la misma tensión. En la masa colgante, el equilibrio da $T = m_1 g$. En la masa que gira, esa misma tensión es la resultante radial:

$$T = m_2 \omega^2 r.$$

Igualar ambas relaciones permite despejar m_1 .

Pasamos a unidades del SI:

$$m_2 = 0,200 \text{ kg}, \quad r = 0,25 \text{ m}.$$

Una vuelta por segundo equivale a:

$$\omega = 2\pi \text{ rad/s}.$$

Para la masa colgante en equilibrio:

$$T = m_1 g.$$

Para la masa que gira sobre la mesa, la tensión proporciona la fuerza centrípeta:

$$T = m_2 \omega^2 r.$$

Igualamos:

$$m_1 g = m_2 \omega^2 r.$$

Por tanto:

$$m_1 = \frac{m_2 \omega^2 r}{g}.$$

Sustituimos:

$$m_1 = \frac{0,200(2\pi)^2 \cdot 0,25}{9,8} \approx 0,201 \text{ kg}.$$

$$m_1 \approx 0,201 \text{ kg}$$

Aproximadamente 201 g.

Lectura del resultado. El resultado queda prácticamente en 200 g porque los datos elegidos hacen que $\omega^2 r$ sea casi igual a g .

Ejercicio 49. Esferas cargadas en equilibrio

Dos esferas de masa 50 g cuelgan del mismo punto mediante dos cuerdas de longitud 0,20 m. Las esferas tienen la misma carga positiva Q y el ángulo entre las cuerdas es 30° .

Datos:

$$g = 9,8 \text{ m/s}^2, \quad k = 9 \cdot 10^9 \text{ N m}^2/\text{C}^2.$$

Calcula el valor de la carga Q .

Solución desarrollada.

Antes de calcular. Cada esfera está en equilibrio bajo tres fuerzas: peso, tensión y repulsión eléctrica. La simetría permite estudiar solo una esfera. El ángulo de cada cuerda con la vertical es la mitad del ángulo total entre cuerdas.

De dónde sale la carga. Cada esfera está en equilibrio. La tensión se elimina dividiendo las ecuaciones de componentes:

$$T \cos \theta = mg, \quad T \sin \theta = F_e.$$

De ahí $F_e = mg \tan \theta$. Después se iguala esa fuerza a la ley de Coulomb, $F_e = kQ^2/d^2$, y se despeja Q .

Cada cuerda forma con la vertical un ángulo:

$$\theta = 15^\circ.$$

Para una esfera en equilibrio:

$$T \cos \theta = mg, \quad T \sin \theta = F_e.$$

Dividiendo:

$$\tan \theta = \frac{F_e}{mg}.$$

La fuerza eléctrica es:

$$F_e = \frac{kQ^2}{d^2}.$$

Por tanto:

$$Q = d \sqrt{\frac{mg \tan \theta}{k}}.$$

La distancia entre las cargas es:

$$d = 2L \sin 15^\circ = 2 \cdot 0,20 \sin 15^\circ = 0,40 \sin 15^\circ.$$

Sustituimos:

$$Q = 0,40 \sin 15^\circ \sqrt{\frac{0,050 \cdot 9,8 \tan 15^\circ}{9 \cdot 10^9}}.$$

$$Q \approx 3,95 \cdot 10^{-7} \text{ C}.$$

En microculombios:

$$Q \approx 0,395 \mu\text{C}.$$

$$Q \approx 3,95 \cdot 10^{-7} \text{ C}$$

$$Q \approx 0,395 \mu\text{C}$$

Lectura del resultado. La carga aparece pequeña porque la fuerza eléctrica necesaria para separar ligeramente masas de 50 g es pequeña.

Ejercicio 50. Cilindro giratorio: rapidez mínima para no caer

Una atracción de feria consiste en un cilindro vertical que rota. Las personas se colocan dentro, con la espalda apoyada en la pared. A partir de cierta rapidez, el suelo puede retirarse y las personas no caen.

Datos:

$$g = 9,8 \text{ m/s}^2, \quad \mu_s = 0,30, \quad R = 3 \text{ m}.$$

Calcula:

- a) la velocidad mínima para que las personas no caigan;

b) la velocidad angular correspondiente.

Solución desarrollada.

Antes de calcular. La pared no sostiene directamente a la persona hacia arriba: la pared ejerce una normal horizontal que produce la fuerza centrípeta. Gracias a esa normal aparece el rozamiento estático vertical que puede compensar el peso.

De dónde sale la rapidez mínima. La normal de la pared es radial, por eso

$$N = m \frac{v^2}{R}.$$

El rozamiento vertical máximo es $\mu_s N$ y debe poder igualar el peso en el límite de no caer:

$$\mu_s N = mg.$$

Al sustituir N se obtiene $v^2 = gR/\mu_s$.

La normal de la pared proporciona la fuerza centrípeta:

$$N = m \frac{v^2}{R}.$$

Para que la persona no caiga, el rozamiento estático debe poder sostener el peso. En el límite:

$$f_s = mg.$$

Además:

$$f_s = \mu_s N.$$

Por tanto:

$$\mu_s m \frac{v^2}{R} = mg.$$

Cancelamos la masa:

$$v^2 = \frac{gR}{\mu_s}.$$

Así:

$$v = \sqrt{\frac{gR}{\mu_s}} = \sqrt{\frac{9,8 \cdot 3}{0,30}} \approx 9,9 \text{ m/s}.$$

La velocidad angular:

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{9,9}{3} \approx 3,3 \text{ rad/s}.$$

$$v_{\text{mín}} \approx 9,9 \text{ m/s}$$

$$\omega \approx 3,3 \text{ rad/s}$$

Lectura del resultado. La masa se cancela: en este modelo ideal, la rapidez mínima no depende de la masa de la persona, sino del radio, de g y del rozamiento.

Cierre.

Esta versión mantiene el orden definitivo del vídeo y recoge los cambios realizados durante la grabación: nuevos datos numéricos, nuevos ejercicios finales de movimiento circular, el problema de esferas cargadas y el cierre con el cilindro giratorio de la atracción de feria.

Vídeo completo de MATEMÁTICAS CON JUAN:

<https://youtu.be/KVRTwzyjp3g>