50 problemas de Física de Fluidos desde cero

Hidrostática, flotación, caudales, Bernoulli y viscosidad

MATEMÁTICAS CON JUAN

`https://www.youtube.com/@matematicaconjuan`

Estos problemas los tienes resueltos en formato vídeo aquí:

`https://youtu.be/5Jf1OyG0xh4`

En esta colección vamos a construir la física de fluidos paso a paso.
Un fluido puede ser un líquido o un gas. El agua, el aire, el aceite y la sangre son ejemplos de fluidos. La física de fluidos nos permite entender por qué flotan los barcos, cómo funcionan los frenos hidráulicos, por qué aumenta la presión con la profundidad, cómo se mueve el agua por una tubería y por qué un avión puede sustentarse.
El objetivo no es empezar con ejercicios difíciles, sino avanzar de forma progresiva, clara y motivadora.

Entender fluidos es entender una parte enorme del mundo real.

Índice de bloques

Bloque A. Densidad, presión y unidades básicas

Ideas esenciales de este bloque:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

$$p = \frac{F}{A}$$

La densidad mide cuánta masa hay por unidad de volumen. La presión mide cuánta fuerza actúa por unidad de superficie.

Ejercicio 1. Densidad de un líquido

Una botella contiene 1,5 L de un líquido cuya masa es:

$$m = 1{,}2 \text{ kg}$$

Calcula la densidad del líquido en kg/m^3.

Solución.
Pasamos el volumen a metros cúbicos:

$$1 \text{ L} = 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$1{,}5 \text{ L} = 1{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

La densidad es:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Sustituimos:

$$\rho = \frac{1{,}2}{1{,}5 \cdot 10^{-3}}$$

$$\rho = 800 \text{ kg/m}^3$$

Por tanto:

$$\boxed{\rho = 800 \text{ kg/m}^3}$$

Ejercicio 2. Masa de un fluido a partir de su densidad

Un depósito contiene 0,030 m^3 de aceite. La densidad del aceite es:

$$\rho = 900 \text{ kg/m}^3$$

Calcula la masa de aceite.

Solución.
Partimos de la definición de densidad:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Despejamos la masa:

$$m = \rho V$$

Sustituimos:

$$m = 900 \cdot 0{,}030$$

$$m = 27 \text{ kg}$$

Por tanto:

$$\boxed{m = 27 \text{ kg}}$$

Ejercicio 3. Volumen de alcohol a partir de la masa

Tenemos 2,4 kg de alcohol etílico. Calcula el volumen que ocupan.
Dato:

$$\rho_{\text{alcohol}} = 790 \text{ kg/m}^3$$

Solución.
Usamos la definición de densidad:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Despejamos el volumen:

$$V = \frac{m}{\rho}$$

Sustituimos los datos:

$$V = \frac{2{,}4}{790}$$

$$V \approx 0{,}00304 \text{ m}^3$$

Ahora pasamos el volumen a litros. Como:

$$1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ L}$$

entonces:

$$0{,}00304 \text{ m}^3 \approx 3{,}04 \text{ L}$$

Por tanto:

$$\boxed{V \approx 0{,}00304 \text{ m}^3}$$

o, en litros:

$$\boxed{V \approx 3{,}04 \text{ L}}$$

Ejercicio 4. Presión ejercida por una fuerza

Una fuerza de 200 N actúa perpendicularmente sobre una superficie de:

$$A = 0{,}50 \text{ m}^2$$

Calcula la presión.

Solución.
La presión se define como:

$$p = \frac{F}{A}$$

Sustituimos:

$$p = \frac{200}{0{,}50} = 400 \text{ Pa}$$

Por tanto:

$$\boxed{p = 400 \text{ Pa}}$$

Recordemos que:

$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$$

Ejercicio 5. Fuerza a partir de la presión

Una presión de 3000 Pa actúa sobre una superficie de:

$$A = 0{,}20 \text{ m}^2$$

Calcula la fuerza ejercida.

Solución.
Partimos de:

$$p = \frac{F}{A}$$

Despejamos:

$$F = pA$$

Sustituimos:

$$F = 3000 \cdot 0{,}20$$

$$F = 600 \text{ N}$$

Por tanto:

$$\boxed{F = 600 \text{ N}}$$

Ejercicio 6. Por qué los esquís reducen la presión

Una persona ejerce una fuerza de 700 N sobre la nieve.
Caso 1: el área de apoyo es 0,020 m^2.
Caso 2: con esquís, el área de apoyo es 0,40 m^2.
Calcula la presión en ambos casos.

Solución.
Usamos:

$$p = \frac{F}{A}$$

Sin esquís:

$$p_1 = \frac{700}{0{,}020} = 35000 \text{ Pa}$$

Con esquís:

$$p_2 = \frac{700}{0{,}40} = 1750 \text{ Pa}$$

Por tanto:

$$\boxed{p_1 = 35000 \text{ Pa}}$$

$$\boxed{p_2 = 1750 \text{ Pa}}$$

Con esquís la presión es mucho menor porque la misma fuerza se reparte sobre una superficie mayor.

Ejercicio 7. Densidad y flotación intuitiva

Un objeto tiene densidad:

$$\rho = 750 \text{ kg/m}^3$$

Se introduce en agua, cuya densidad es:

$$\rho_{\text{agua}} = 1000 \text{ kg/m}^3$$

¿Tenderá a flotar o a hundirse?

Solución.
Comparamos densidades:

$$750 < 1000$$

El objeto es menos denso que el agua.
Por tanto, tenderá a flotar.

$$\boxed{\text{El objeto flota.}}$$

La idea física es que, si un cuerpo tiene menor densidad media que el líquido, puede mantenerse flotando.

Ejercicio 8. Presión en kilopascales

Una presión vale:

$$p = 250000 \text{ Pa}$$

Exprésala en kilopascales.

Solución.
Sabemos que:

$$1 \text{ kPa} = 1000 \text{ Pa}$$

Por tanto:

$$250000 \text{ Pa} = \frac{250000}{1000} \text{ kPa}$$
$$250000 \text{ Pa} = 250 \text{ kPa}$$

Así que:

$$\boxed{p = 250 \text{ kPa}}$$

Ejercicio 9. Peso de un volumen de agua

Calcula el peso de 2 L de agua.
Datos:

$$\rho_{\text{agua}} = 1000 \text{ kg/m}^3, \qquad g = 9{,}8 \text{ m/s}^2$$

Solución.
Primero pasamos el volumen:

$$2 \text{ L} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

Calculamos la masa:

$$m = \rho V$$
$$m = 1000 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 2 \text{ kg}$$

El peso es:

$$P = mg$$
$$P = 2 \cdot 9{,}8 = 19{,}6 \text{ N}$$

Por tanto:

$$\boxed{P = 19{,}6 \text{ N}}$$

Ejercicio 10. Identificar un material por su densidad

Un pequeño bloque metálico tiene forma de cubo. Su arista mide:

$$a = 4 \text{ cm}$$

y su masa es:

$$m = 0{,}50 \text{ kg}$$

Calcula su densidad en kg/m^3 y decide si podría ser aluminio o hierro.
Datos orientativos:

$$\rho_{\text{aluminio}} \approx 2700 \text{ kg/m}^3$$
$$\rho_{\text{hierro}} \approx 7800 \text{ kg/m}^3$$

Solución.
Este ejercicio es distinto a los anteriores porque primero tenemos que calcular el volumen a partir de la geometría del cuerpo.
La arista del cubo es:

$$a = 4 \text{ cm}$$

Pasamos a metros:

$$4 \text{ cm} = 0{,}04 \text{ m}$$

El volumen de un cubo es:

$$V = a^3$$

Por tanto:

$$V = (0{,}04)^3$$

$$V = 0{,}000064 \text{ m}^3$$

Ahora calculamos la densidad:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Sustituimos:

$$\rho = \frac{0{,}50}{0{,}000064}$$

$$\rho = 7812{,}5 \text{ kg/m}^3$$

Por tanto:

$$\boxed{\rho \approx 7{,}8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3}$$

Comparamos con los datos:

$$\rho_{\text{aluminio}} \approx 2700 \text{ kg/m}^3$$

$$\rho_{\text{hierro}} \approx 7800 \text{ kg/m}^3$$

La densidad obtenida está muy cerca de la del hierro.
Por tanto:

$$\boxed{\text{el bloque podría ser de hierro}}$$

Bloque B. Presión hidrostática y principio de Pascal

En un líquido en reposo, la presión aumenta con la profundidad:

$$p = \rho g h$$

Si además consideramos la presión atmosférica:

$$p_{\text{total}} = p_{\text{atm}} + \rho g h$$

El principio de Pascal dice que una presión aplicada a un fluido encerrado se transmite por igual a todos los puntos del fluido.

Ejercicio 11. Presión a una profundidad en agua

Calcula la presión hidrostática a una profundidad de:

$$h = 5 \text{ m}$$

en agua.
Datos:

$$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3, \qquad g = 9{,}8 \text{ m/s}^2$$

Solución.
Usamos:

$$p = \rho g h$$

Sustituimos:

$$p = 1000 \cdot 9{,}8 \cdot 5$$

$$p = 49000 \text{ Pa}$$

Por tanto:

$$\boxed{p = 49000 \text{ Pa}}$$

Esta es la presión debida únicamente al agua, sin contar la presión atmosférica.

Ejercicio 12. Presión total bajo el agua

Calcula la presión total a 10 m de profundidad en agua.
Datos:

$$p_{\text{atm}} = 101325 \text{ Pa}, \quad \rho = 1000 \text{ kg/m}^3, \quad g = 9{,}8 \text{ m/s}^2$$

Solución.
Primero calculamos la presión hidrostática:

$$p_h = \rho g h$$

$$p_h = 1000 \cdot 9{,}8 \cdot 10 = 98000 \text{ Pa}$$

La presión total es:

$$p_{\text{total}} = p_{\text{atm}} + p_h$$

$$p_{\text{total}} = 101325 + 98000 = 199325 \text{ Pa}$$

Por tanto:

$$\boxed{p_{\text{total}} = 199325 \text{ Pa}}$$

Aproximadamente:

$$\boxed{p_{\text{total}} \approx 2{,}0 \cdot 10^5 \text{ Pa}}$$

Ejercicio 13. Profundidad a partir de la presión

En un lago, la presión hidrostática es:

$$p = 29400 \text{ Pa}$$

Calcula la profundidad.
Datos:

$$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3, \qquad g = 9{,}8 \text{ m/s}^2$$

Solución.
Usamos:

$$p = \rho g h$$

Despejamos:

$$h = \frac{p}{\rho g}$$

Sustituimos:

$$h = \frac{29400}{1000 \cdot 9{,}8}$$

$$h = 3 \text{ m}$$

Por tanto:

$$\boxed{h = 3 \text{ m}}$$

Ejercicio 14. Comparar presión en agua y aceite

Calcula la presión hidrostática a 4 m de profundidad en agua y en aceite.
Datos:

$$\rho_{\text{agua}} = 1000 \text{ kg/m}^3, \quad \rho_{\text{aceite}} = 800 \text{ kg/m}^3, \quad g = 9{,}8 \text{ m/s}^2$$

Solución.
En agua:

$$p_{\text{agua}} = \rho g h = 1000 \cdot 9{,}8 \cdot 4$$

$$p_{\text{agua}} = 39200 \text{ Pa}$$

En aceite:

$$p_{\text{aceite}} = 800 \cdot 9{,}8 \cdot 4$$

$$p_{\text{aceite}} = 31360 \text{ Pa}$$

Por tanto:

$$\boxed{p_{\text{agua}} = 39200 \text{ Pa}}$$

$$\boxed{p_{\text{aceite}} = 31360 \text{ Pa}}$$

A la misma profundidad, el agua ejerce más presión porque es más densa.

Ejercicio 15. Fuerza sobre la ventana circular de un submarino

La ventana circular de un submarino tiene radio:

$$r = 10 \text{ cm}$$

El submarino se encuentra a una profundidad de:

$$h = 1 \text{ km}$$

Calcula la fuerza que soporta la ventana debido a la presión hidrostática del agua.
Datos:

$$\rho_{\text{agua}} = 1000 \text{ kg/m}^3$$

$$g = 9{,}8 \text{ m/s}^2$$

Solución.
La presión hidrostática viene dada por:

$$p = \rho g h$$

Antes de sustituir, pasamos las unidades al Sistema Internacional:

$$r = 10 \text{ cm} = 0{,}10 \text{ m}$$

$$h = 1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$$

Calculamos la presión hidrostática:

$$p = 1000 \cdot 9{,}8 \cdot 1000$$

$$p = 9800000 \text{ Pa}$$

Ahora necesitamos el área de la ventana. Como la ventana es circular:

$$A = \pi r^2$$

Sustituimos:

$$A = \pi \cdot (0{,}10)^2$$

$$A = 0{,}01\pi \text{ m}^2$$

La presión se define como:

$$p = \frac{F}{A}$$

Despejamos la fuerza:

$$F = pA$$

Sustituimos:

$$F = 9800000 \cdot 0{,}01\pi$$

$$F = 98000\pi \text{ N}$$

Aproximando:

$$F \approx 307876 \text{ N}$$

Por tanto:

$$\boxed{F \approx 3{,}08 \cdot 10^5 \text{ N}}$$

La ventana soporta una fuerza aproximada de:

$$\boxed{307876 \text{ N}}$$

Ejercicio 16. Principio de Pascal en una prensa hidráulica

En una prensa hidráulica, el pistón pequeño tiene área:

$$A_1 = 0{,}010 \text{ m}^2$$

y el pistón grande:

$$A_2 = 0{,}50 \text{ m}^2$$

Si aplicamos una fuerza de $F_1 = 200$ N en el pistón pequeño, calcula la fuerza en el pistón grande.

Solución.
Por el principio de Pascal:

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

Despejamos:

$$F_2 = F_1 \frac{A_2}{A_1}$$

Sustituimos:

$$F_2 = 200 \cdot \frac{0{,}50}{0{,}010}$$

$$F_2 = 200 \cdot 50 = 10000 \text{ N}$$

Por tanto:

$$\boxed{F_2 = 10000 \text{ N}}$$

La prensa hidráulica multiplica la fuerza.

Ejercicio 17. Área necesaria en el pistón grande

En una prensa hidráulica se aplica una fuerza:

$$F_1 = 150 \text{ N}$$

sobre un pistón de área:

$$A_1 = 0{,}005 \text{ m}^2$$

Queremos obtener una fuerza:

$$F_2 = 6000 \text{ N}$$

Calcula el área necesaria del pistón grande.

Solución.
Usamos:

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

Despejamos:

$$A_2 = \frac{F_2 A_1}{F_1}$$

Sustituimos:

$$A_2 = \frac{6000 \cdot 0{,}005}{150}$$

$$A_2 = 0{,}20 \text{ m}^2$$

Por tanto:

$$\boxed{A_2 = 0{,}20 \text{ m}^2}$$

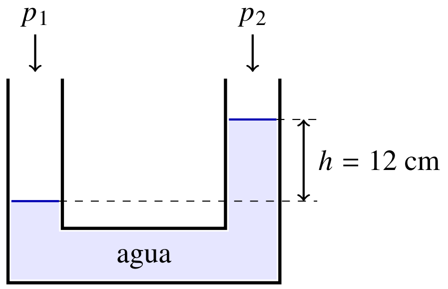
Ejercicio 18. Manómetro sencillo

Un manómetro sencillo está formado por un **tubo en U** que contiene únicamente agua.
Una rama del tubo está sometida a una presión p_1, y la otra rama está sometida a una presión p_2. Como las presiones no son iguales, los niveles de agua en las dos ramas quedan a distinta altura.
La diferencia vertical entre los dos niveles de agua es:

$$h = 12 \text{ cm}$$

Calcula la diferencia de presión entre los dos lados del manómetro.
Datos:

$$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3, \qquad g = 9{,}8 \text{ m/s}^2$$



Solución.
El manómetro no mide directamente la presión. Lo que observamos es una **diferencia de alturas** entre los niveles de agua en las dos ramas del tubo.
Esa diferencia de alturas aparece porque las presiones en los dos lados no son iguales.
Si una rama está sometida a mayor presión, esa presión empuja el agua hacia abajo en esa rama. Como el agua se desplaza, sube por la otra rama.
Por eso, una diferencia de alturas nos indica que existe una diferencia de presión.
La relación entre la diferencia de presión y la diferencia de alturas es:

$$\Delta p = \rho g h$$

En esta fórmula:

- Δp es la diferencia de presión entre las dos ramas.
- ρ es la densidad del agua.
- g es la aceleración de la gravedad.
- h es la diferencia vertical entre los dos niveles de agua.

Primero pasamos la altura a metros:

$$12 \text{ cm} = 0{,}12 \text{ m}$$

Ahora sustituimos en la fórmula:

$$\Delta p = 1000 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}12$$

Calculamos:

$$\Delta p = 1176 \text{ Pa}$$

Por tanto:

$$\boxed{\Delta p = 1176 \text{ Pa}}$$

Interpretación.
Una diferencia de alturas de 12 cm de agua en un tubo en U indica que entre las dos ramas existe una diferencia de presión de:

$$\boxed{1176 \text{ Pa}}$$

La idea clave del ejercicio es:

$$\boxed{\text{El tubo en U transforma una diferencia de presión en una diferencia de alturas.}}$$

Ejercicio 19. Tubo en U con dos líquidos

En un tubo en U hay **agua** y **aceite**.
En la rama izquierda hay una columna de aceite de altura:

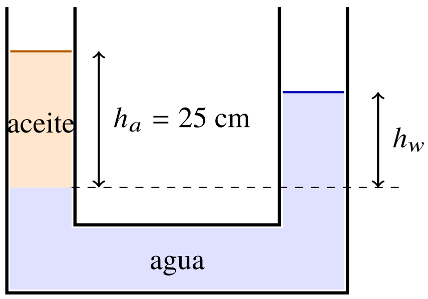
$$h_a = 25 \text{ cm}$$

La densidad del aceite es:

$$\rho_a = 800 \text{ kg/m}^3$$

Calcula la altura de agua h_w que produce la **misma presión**.
Dato:

$$\rho_{\text{agua}} = 1000 \text{ kg/m}^3$$



Tubo en U con agua y aceite

Solución.
La idea clave en este tipo de problema es que, si tomamos dos puntos que están a la **misma altura** dentro del mismo líquido, la presión en esos dos puntos debe ser la misma.
En el dibujo, comparamos las presiones a la altura de la línea discontinua.
La columna de aceite de altura h_a ejerce la misma presión que una columna de agua de altura h_w.
Por eso igualamos:

$$\rho_a g h_a = \rho_{\text{agua}} g h_w$$

La aceleración de la gravedad aparece en ambos lados, así que se simplifica:

$$\rho_a h_a = \rho_{\text{agua}} h_w$$

Despejamos h_w:

$$h_w = \frac{\rho_a h_a}{\rho_{\text{agua}}}$$

Sustituimos los datos:

$$h_w = \frac{800 \cdot 25}{1000}$$

$$h_w = 20 \text{ cm}$$

Por tanto:

$$\boxed{h_w = 20 \text{ cm}}$$

Interpretación.
Como el aceite es menos denso que el agua, necesita una columna más alta para producir la misma presión. Por eso:

$$25 \text{ cm de aceite} \quad \text{equivalen a} \quad 20 \text{ cm de agua}$$

Ejercicio 20. Densidad de un líquido en un tubo en U

En un tubo en U hay **agua** en una rama y un **líquido desconocido** en la otra.
Ambas ramas están abiertas a la atmósfera.
La columna de agua, medida desde el nivel de separación entre los líquidos, tiene altura:

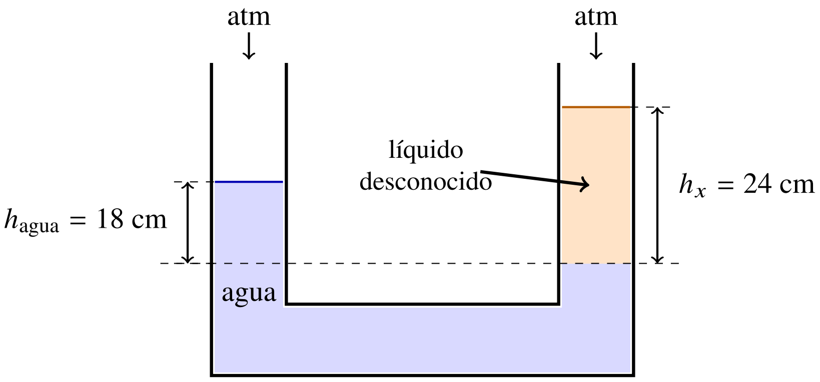
$$h_{\text{agua}} = 18 \text{ cm}$$

La columna del líquido desconocido, medida desde ese mismo nivel, tiene altura:

$$h_x = 24 \text{ cm}$$

Calcula la densidad del líquido desconocido.
Dato:

$$\rho_{\text{agua}} = 1000 \text{ kg/m}^3$$



Tubo en U con agua y líquido desconocido

Solución.
Como el tubo está en equilibrio, la presión en dos puntos situados a la **misma altura** debe ser la misma.
Tomamos como referencia el **nivel de separación entre los líquidos**, que aparece indicado con la línea discontinua del dibujo.
Además, como ambas ramas están abiertas a la atmósfera, la presión atmosférica es la misma en los dos lados y no altera la igualdad final.
Por tanto, igualamos las presiones hidrostáticas:

$$\rho_{\text{agua}}\, g\, h_{\text{agua}} = \rho_x\, g\, h_x$$

Simplificamos el factor g:

$$\rho_{\text{agua}}\, h_{\text{agua}} = \rho_x\, h_x$$

Despejamos la densidad del líquido desconocido:

$$\rho_x = \frac{\rho_{\text{agua}}\, h_{\text{agua}}}{h_x}$$

Sustituimos los datos:

$$\rho_x = \frac{1000 \cdot 18}{24}$$

$$\rho_x = 750\ \text{kg/m}^3$$

Por tanto:

$$\boxed{\rho_x = 750\ \text{kg/m}^3}$$

Interpretación.
El líquido desconocido resulta ser **menos denso que el agua**, porque para producir la misma presión necesita una columna más alta.
En efecto:

$$24\ \text{cm} > 18\ \text{cm}$$

y eso encaja con el resultado obtenido:

$$\boxed{\rho_x = 750\ \text{kg/m}^3}$$

Bloque C. Principio de Arquímedes y flotación

Un cuerpo sumergido en un fluido recibe un empuje vertical hacia arriba:

$$E = \rho_{\text{fluido}} g V_{\text{desplazado}}$$

El empuje depende del fluido y del volumen desplazado.
Si el empuje es mayor que el peso, el cuerpo sube. Si el empuje es menor que el peso, se hunde. Si son iguales, queda en equilibrio.

Ejercicio 21. Empuje sobre un cuerpo sumergido

Un cuerpo está completamente sumergido en agua y desplaza un volumen de agua de:

$$V = 0{,}004 \text{ m}^3$$

Calcula el empuje que recibe.
Datos:

$$\rho_{\text{agua}} = 1000 \text{ kg/m}^3, \qquad g = 9{,}8 \text{ m/s}^2$$

Solución.
El principio de Arquímedes dice que todo cuerpo sumergido en un fluido recibe un empuje hacia arriba igual al peso del fluido desalojado.
Usamos:

$$E = \rho g V$$

Sustituimos:

$$E = 1000 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}004$$

$$E = 39{,}2 \text{ N}$$

Por tanto:

$$\boxed{E = 39{,}2 \text{ N}}$$

El agua empuja al cuerpo hacia arriba con una fuerza de 39,2 N.

Ejercicio 22. Peso aparente dentro del agua

Un objeto pesa en el aire:

$$P = 80 \text{ N}$$

Cuando se sumerge en agua recibe un empuje de:

$$E = 25 \text{ N}$$

Calcula su peso aparente dentro del agua.

Solución.
Dentro del agua, el objeto parece pesar menos porque el agua lo empuja hacia arriba.
El peso aparente se calcula restando el empuje al peso real:

$$P_{\text{aparente}} = P - E$$

Sustituimos:

$$P_{\text{aparente}} = 80 - 25$$

$$P_{\text{aparente}} = 55 \text{ N}$$

Por tanto:

$$\boxed{P_{\text{aparente}} = 55 \text{ N}}$$

El peso real del objeto sigue siendo 80 N, pero dentro del agua parece pesar 55 N.

Ejercicio 23. Comparar peso y empuje

Un cuerpo sumergido en un líquido está sometido a dos fuerzas principales: su peso (P), hacia abajo, y el empuje (E), hacia arriba.
Estudia qué ocurre en cada caso.
Caso A:

$$P = 45 \text{ N}, \qquad E = 60 \text{ N}$$

Caso B:

$$P = 70 \text{ N}, \qquad E = 52 \text{ N}$$

Caso C:

$$P = 64 \text{ N}, \qquad E = 64 \text{ N}$$

Solución.
Comparamos siempre el peso (P) con el empuje (E).
Caso A.

$$P = 45 \text{ N}, \qquad E = 60 \text{ N}$$

El empuje es mayor que el peso:

$$E > P$$

Por tanto, la fuerza resultante va hacia arriba.

$$\boxed{\text{El cuerpo sube.}}$$

Caso B.

$$P = 70 \text{ N}, \qquad E = 52 \text{ N}$$

El peso es mayor que el empuje:

$$P > E$$

Por tanto, la fuerza resultante va hacia abajo.

$$\boxed{\text{El cuerpo se hunde.}}$$

Caso C.

$$P = 64 \text{ N}, \qquad E = 64 \text{ N}$$

El peso y el empuje son iguales:

$$P = E$$

Por tanto, las fuerzas se equilibran.

$$\boxed{\text{El cuerpo queda en equilibrio.}}$$

Resumen:

$$E > P \quad \text{el cuerpo sube}$$

$$E < P \quad \text{el cuerpo se hunde}$$

$$E = P \quad \text{el cuerpo queda en equilibrio}$$

Ejercicio 24. Equilibrio dentro de un fluido

Un cuerpo está totalmente sumergido en un líquido y queda en reposo, sin subir ni bajar.
¿Qué relación hay entre la densidad del cuerpo y la densidad del líquido?

Solución.
Si el cuerpo no sube ni baja, está en equilibrio.
Eso significa que el peso y el empuje tienen el mismo valor:

$$P = E$$

El peso del cuerpo es:

$$P = \rho_c g V$$

El empuje que recibe es:

$$E = \rho_f g V$$

Como el cuerpo está en equilibrio, igualamos:

$$\rho_c g V = \rho_f g V$$

Se simplifican (g) y (V):

$$\rho_c = \rho_f$$

Por tanto:

$$\boxed{\rho_c = \rho_f}$$

Si un cuerpo queda suspendido dentro de un fluido, sin subir ni bajar, su densidad es igual a la densidad del fluido.

Ejercicio 25. Volumen desplazado por un cuerpo flotante

Un bloque flota en equilibrio en agua y tiene una masa de:

$$m = 3{,}2 \text{ kg}$$

Calcula el volumen de agua que desplaza.
Dato:

$$\rho_f = 1000 \text{ kg/m}^3$$

donde ρ_f es la densidad del agua.

Solución.
Como el bloque flota en equilibrio, no sube ni baja.
Por tanto, la fuerza total sobre el bloque es cero. Eso significa que el empuje hacia arriba iguala al peso hacia abajo:

$$E = P$$

Llamamos V_s al volumen de agua desplazado por el bloque.
Ese volumen coincide con el volumen sumergido del bloque.
El empuje es:

$$E = \rho_f g V_s$$

El peso del bloque es:

$$P = mg$$

Como el bloque flota en equilibrio, igualamos:

$$\rho_f g V_s = mg$$

Se simplifica g:

$$\rho_f V_s = m$$

Despejamos el volumen de agua desplazado:

$$V_s = \frac{m}{\rho_f}$$

Sustituimos:

$$V_s = \frac{3{,}2}{1000}$$

$$V_s = 0{,}0032 \text{ m}^3$$

Por tanto:

$$\boxed{V_s = 0{,}0032 \text{ m}^3}$$

El bloque desplaza $0{,}0032 \text{ m}^3$ de agua.
No hemos calculado el volumen total del bloque. Hemos calculado solamente el volumen de agua desplazado, que coincide con la parte sumergida del bloque.

Ejercicio 26. Fracción sumergida de un bloque

Un bloque tiene densidad:

$$\rho_b = 640 \text{ kg/m}^3$$

y flota en equilibrio en agua.

Dato:

$$\rho_f = 1000 \text{ kg/m}^3$$

donde ρ_f es la densidad del agua.
Calcula qué fracción de su volumen queda sumergida.

Solución.
Llamamos V_s al volumen sumergido del bloque y V_T al volumen total del bloque.
Como el bloque flota en equilibrio, no sube ni baja. Por tanto, la fuerza total sobre el bloque es cero. Eso significa que el empuje hacia arriba iguala al peso hacia abajo:

$$E = P$$

El empuje depende del volumen sumergido:

$$E = \rho_f g V_s$$

El peso del bloque depende de su volumen total:

$$P = \rho_b g V_T$$

Como el bloque flota en equilibrio, igualamos:

$$\rho_f g V_s = \rho_b g V_T$$

Se simplifica g:

$$\rho_f V_s = \rho_b V_T$$

Despejamos la fracción sumergida:

$$\frac{V_s}{V_T} = \frac{\rho_b}{\rho_f}$$

Sustituimos:

$$\frac{V_s}{V_T} = \frac{640}{1000} = 0{,}64$$

Por tanto:

$$\boxed{\frac{V_s}{V_T} = 0{,}64}$$

El bloque queda sumergido el 64 por ciento de su volumen y queda fuera del agua el 36 por ciento restante.

Ejercicio 27. Densidad usando peso aparente

Un objeto pesa en el aire $P = 72$ N. Cuando se sumerge completamente en agua, su peso aparente es $P_a = 48$ N.
Calcula la densidad del objeto.
Dato: $\rho_f = 1000 \text{ kg/m}^3$, donde ρ_f es la densidad del agua.

Solución.
El peso aparente es el peso que marca el dinamómetro cuando el objeto está sumergido en el agua.
La diferencia entre el peso real y el peso aparente es el empuje:

$$E = P - P_a$$

Sustituimos:

$$E = 72 - 48 = 24 \text{ N}$$

Como el objeto está completamente sumergido, el volumen de fluido desplazado coincide con el volumen del objeto.
El peso real del objeto es:

$$P = \rho_c g V$$

El empuje que recibe en el agua es:

$$E = \rho_f g V$$

Dividimos ambas expresiones:

$$\frac{P}{E} = \frac{\rho_c g V}{\rho_f g V}$$

Se simplifican g y V:

$$\frac{P}{E} = \frac{\rho_c}{\rho_f}$$

Despejamos la densidad del objeto:

$$\rho_c = \rho_f \frac{P}{E}$$

Sustituimos:

$$\rho_c = 1000 \cdot \frac{72}{24}$$

$$\rho_c = 3000 \text{ kg/m}^3$$

Por tanto:

$$\boxed{\rho_c = 3000 \text{ kg/m}^3}$$

El objeto es más denso que el agua, porque su densidad es mayor que 1000 kg/m^3.

Ejercicio 28. Flotacion en agua y en aceite

Un bloque tiene densidad $\rho_b = 720 \text{ kg/m}^3$.
Se deja flotar en equilibrio primero en agua y después en aceite.
Datos: $\rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3$ y $\rho_o = 900 \text{ kg/m}^3$, donde ρ_w es la densidad del agua y ρ_o es la densidad del aceite.
Calcula qué fracción del bloque queda sumergida en cada fluido.

Solución.
Llamamos V_s al volumen sumergido y V_T al volumen total del bloque.
Como el bloque flota en equilibrio, no sube ni baja. Por tanto, el empuje hacia arriba iguala al peso hacia abajo:

$$E = P$$

El empuje depende del volumen sumergido:

$$E = \rho_f g V_s$$

El peso del bloque depende de su volumen total:

$$P = \rho_b g V_T$$

Igualamos:

$$\rho_f g V_s = \rho_b g V_T$$

Se simplifica g:

$$\rho_f V_s = \rho_b V_T$$

Despejamos la fracción sumergida:

$$\frac{V_s}{V_T} = \frac{\rho_b}{\rho_f}$$

En agua.
En agua, $\rho_f = \rho_w = 1000\ \mathrm{kg/m^3}$. Entonces:

$$\frac{V_s}{V_T} = \frac{720}{1000} = 0{,}72$$

Por tanto:

$$\boxed{\frac{V_s}{V_T} = 0{,}72}$$

En agua queda sumergido el 72 por ciento del volumen del bloque.
En aceite.
En aceite, $\rho_f = \rho_o = 900\ \mathrm{kg/m^3}$. Entonces:

$$\frac{V_s}{V_T} = \frac{720}{900} = 0{,}80$$

Por tanto:

$$\boxed{\frac{V_s}{V_T} = 0{,}80}$$

En aceite queda sumergido el 80 por ciento del volumen del bloque.
Interpretación.
El bloque queda más sumergido en aceite que en agua, porque el aceite es menos denso que el agua.

Ejercicio 29. Carga máxima de una plataforma flotante

Una plataforma flotante tiene una masa $m_p = 240$ kg.
Cuando está a punto de hundirse, puede desplazar como máximo un volumen de agua $V_m = 0{,}50\ \mathrm{m^3}$.
Calcula la masa máxima de carga que puede sostener sin hundirse.
Dato: $\rho_f = 1000\ \mathrm{kg/m^3}$, donde ρ_f es la densidad del agua.

Solución.
Llamamos m_p a la masa de la plataforma, m_c a la masa de la carga y m_T a la masa total máxima.
Cuando la plataforma está justo a punto de hundirse, desplaza el volumen máximo de agua.
En esa situación límite, el empuje máximo iguala al peso total:

$$E = P_T$$

El empuje máximo es:

$$E = \rho_f g V_m$$

El peso total es:

$$P_T = m_T g$$

Igualamos:

$$\rho_f g V_m = m_T g$$

Se simplifica g:

$$m_T = \rho_f V_m$$

Sustituimos:

$$m_T = 1000 \cdot 0{,}50 = 500 \text{ kg}$$

Esa masa total incluye la masa de la plataforma y la masa de la carga:

$$m_T = m_p + m_c$$

Despejamos la masa de la carga:

$$m_c = m_T - m_p$$

Sustituimos:

$$m_c = 500 - 240 = 260 \text{ kg}$$

Por tanto:

$$\boxed{m_c = 260 \text{ kg}}$$

La plataforma puede sostener como máximo 260 kg de carga adicional.

Ejercicio 30. Submarino y flotabilidad neutra

Un pequeño submarino tiene un volumen exterior $V = 6{,}5 \text{ m}^3$.
Su masa, sin agua de lastre, es $m_s = 5400$ kg.
El submarino se encuentra en agua de mar, cuya densidad es $\rho_f = 1020 \text{ kg/m}^3$.
Calcula cuánta masa de agua de lastre debe entrar en el submarino para que quede en equilibrio dentro del agua, sin subir ni bajar.

Solución.
Para que el submarino quede en equilibrio dentro del agua, no debe subir ni bajar.
Por tanto, el empuje hacia arriba debe igualar al peso total hacia abajo:

$$E = P_T$$

El empuje que recibe el submarino es:

$$E = \rho_f g V$$

El peso total del submarino es:

$$P_T = m_T g$$

donde m_T es la masa total que debe tener el submarino para quedar en equilibrio.

Igualamos:

$$\rho_f g V = m_T g$$

Se simplifica g:

$$m_T = \rho_f V$$

Sustituimos:

$$m_T = 1020 \cdot 6{,}5 = 6630 \text{ kg}$$

Esta es la masa total que debe tener el submarino para quedar en equilibrio dentro del agua.
Como el submarino sin agua de lastre tiene masa $m_s = 5400$ kg, la masa de agua de lastre necesaria es:

$$m_l = m_T - m_s$$

Sustituimos:

$$m_l = 6630 - 5400 = 1230 \text{ kg}$$

Por tanto:

$$\boxed{m_l = 1230 \text{ kg}}$$

El submarino debe dejar entrar 1230 kg de agua de lastre para quedar en equilibrio dentro del agua.

Bloque D. Fluidos en movimiento: caudal, continuidad y Bernoulli

En este bloque estudiamos fluidos en movimiento. Las ideas principales son:
Caudal:

$$Q = \frac{V}{t}$$

También puede escribirse como:

$$Q = Av$$

donde A es el área de la sección y v es la velocidad del fluido.
Continuidad para un fluido incompresible:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

Bernoulli:

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = \text{constante}$$

Esta ecuación relaciona presión, velocidad y altura.

Ejercicio 31. Caudal de una tubería

Por una tubería pasan $V = 0{,}12\ \text{m}^3$ de agua en $t = 20$ s.
Calcula el caudal.

Solución.
El caudal mide el volumen de fluido que pasa por unidad de tiempo.
Usamos:

$$Q = \frac{V}{t}$$

Sustituimos:

$$Q = \frac{0{,}12}{20} = 0{,}006\ \text{m}^3/\text{s}$$

Por tanto:

$$\boxed{Q = 0{,}006\ \text{m}^3/\text{s}}$$

Ejercicio 32. Velocidad a partir del caudal

Por una tubería de sección $A = 0{,}020\ \text{m}^2$ circula agua con caudal $Q = 0{,}10\ \text{m}^3/\text{s}$.
Calcula la velocidad del agua.

Solución.
Usamos la relación entre caudal, área y velocidad:

$$Q = Av$$

Despejamos la velocidad:

$$v = \frac{Q}{A}$$

Sustituimos:

$$v = \frac{0{,}10}{0{,}020} = 5 \text{ m/s}$$

Por tanto:

$$\boxed{v = 5 \text{ m/s}}$$

Ejercicio 33. Caudal en una tubería circular

El agua circula por una tubería circular de radio $r = 2$ cm con velocidad $v = 3$ m/s.
Calcula el caudal en m^3/s y en litros por segundo.

Solución.
Primero pasamos el radio a metros:

$$2 \text{ cm} = 0{,}02 \text{ m}$$

El área de la sección circular es:

$$A = \pi r^2$$

Sustituimos:

$$A = \pi \cdot (0{,}02)^2$$

$$A = \pi \cdot 0{,}0004$$

$$A \approx 0{,}00126 \text{ m}^2$$

Ahora usamos:

$$Q = Av$$

Sustituimos:

$$Q = 0{,}00126 \cdot 3$$

$$Q \approx 0{,}00378 \text{ m}^3/\text{s}$$

Como $1 \text{ m}^3 = 1000$ L, entonces:

$$0{,}00378 \text{ m}^3/\text{s} \approx 3{,}78 \text{ L/s}$$

Por tanto:

$$\boxed{Q \approx 0{,}00378 \text{ m}^3/\text{s}}$$

$$\boxed{Q \approx 3{,}78 \text{ L/s}}$$

Ejercicio 34. Ecuación de continuidad

El agua circula por una tubería. En una zona, el área es $A_1 = 0{,}040 \text{ m}^2$ y la velocidad es $v_1 = 2$ m/s.
En una zona más estrecha, el área es $A_2 = 0{,}010 \text{ m}^2$.
Calcula v_2.

Solución.
Para un fluido incompresible, el caudal se conserva.
Por tanto:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

Despejamos:

$$v_2 = \frac{A_1 v_1}{A_2}$$

Sustituimos:

$$v_2 = \frac{0{,}040 \cdot 2}{0{,}010}$$

$$v_2 = 8 \text{ m/s}$$

Por tanto:

$$\boxed{v_2 = 8 \text{ m/s}}$$

Al estrecharse la tubería, el fluido aumenta su velocidad.

Ejercicio 35. Tubo que se estrecha

En una tubería circular, el radio pasa de $r_1 = 4$ cm a $r_2 = 2$ cm.
Si la velocidad inicial es $v_1 = 1{,}5$ m/s, calcula la velocidad final.

Solución.
Como la sección es circular, el área es:

$$A = \pi r^2$$

Por continuidad:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

Despejamos:

$$v_2 = v_1 \frac{A_1}{A_2}$$

Como las áreas son proporcionales al cuadrado del radio:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

Entonces:

$$v_2 = v_1 \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

Sustituimos:

$$v_2 = 1{,}5 \cdot \frac{4^2}{2^2}$$

$$v_2 = 1{,}5 \cdot 4$$

$$v_2 = 6 \text{ m/s}$$

Por tanto:

$$\boxed{v_2 = 6 \text{ m/s}}$$

Al reducirse el radio a la mitad, el área se reduce a la cuarta parte y la velocidad se multiplica por cuatro.

Ejercicio 36. Bernoulli horizontal sencillo

En una tubería horizontal, el agua pasa de una zona donde $v_1 = 2$ m/s a otra zona donde $v_2 = 6$ m/s.
Si la presión inicial es $p_1 = 200000$ Pa, calcula la presión final.
Dato: $\rho = 1000$ kg/m^3.

Solución.
Como la tubería es horizontal, la altura no cambia.
Bernoulli queda:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Despejamos p_2:

$$p_2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2)$$

Sustituimos:

$$p_2 = 200000 + \frac{1}{2} \cdot 1000(2^2 - 6^2)$$

$$p_2 = 200000 + 500(4 - 36)$$

$$p_2 = 200000 - 16000$$

$$p_2 = 184000 \text{ Pa}$$

Por tanto:

$$\boxed{p_2 = 184000 \text{ Pa}}$$

Al aumentar la velocidad, disminuye la presión.

Ejercicio 37. Venturi: continuidad y Bernoulli

El agua circula por una tubería horizontal. En la zona ancha, el área es $A_1 = 0{,}040$ m^2, la velocidad es $v_1 = 3$ m/s y la presión es $p_1 = 150000$ Pa.
En la zona estrecha, el área es $A_2 = 0{,}020$ m^2.
Calcula la velocidad v_2 y la presión p_2 en la zona estrecha.
Dato: $\rho = 1000$ kg/m^3.

Solución.
Primero usamos continuidad:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

Despejamos:

$$v_2 = \frac{A_1 v_1}{A_2}$$

Sustituimos:

$$v_2 = \frac{0{,}040 \cdot 3}{0{,}020}$$

$$v_2 = 6 \text{ m/s}$$

Ahora usamos Bernoulli. Como la tubería es horizontal:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Despejamos:

$$p_2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2)$$

Sustituimos:

$$p_2 = 150000 + \frac{1}{2} \cdot 1000(3^2 - 6^2)$$

$$p_2 = 150000 + 500(9 - 36)$$

$$p_2 = 150000 - 13500$$

$$p_2 = 136500 \text{ Pa}$$

Por tanto:

$$\boxed{v_2 = 6 \text{ m/s}}$$

$$\boxed{p_2 = 136500 \text{ Pa}}$$

En la zona estrecha aumenta la velocidad y disminuye la presión.

Ejercicio 38. Torricelli y caudal de salida

Un deposito tiene un orificio situado a una profundidad $h = 1{,}8$ m bajo la superficie libre del agua.
El área del orificio es $A = 2{,}0 \cdot 10^{-4}$ m^2.
Calcula la velocidad de salida del agua y el caudal.
Dato: $g = 9{,}8$ m/s^2.

Solución.
Por el teorema de Torricelli:

$$v = \sqrt{2gh}$$

Sustituimos:

$$v = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 1{,}8}$$

$$v = \sqrt{35{,}28}$$

$$v \approx 5{,}94 \text{ m/s}$$

Ahora calculamos el caudal:

$$Q = Av$$

Sustituimos:

$$Q = 2{,}0 \cdot 10^{-4} \cdot 5{,}94$$

$$Q \approx 1{,}19 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

Por tanto:

$$\boxed{v \approx 5{,}94 \text{ m/s}}$$

$$\boxed{Q \approx 1{,}19 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}}$$

Ejercicio 39. Tubo de Pitot y presión dinamica

Un tubo de Pitot mide en agua una diferencia de presión de $\Delta p = 4500$ Pa.
Calcula la velocidad del agua.
Dato: $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$.

Solución.
En un tubo de Pitot ideal, la diferencia de presión está relacionada con la velocidad mediante:

$$\Delta p = \frac{1}{2}\rho v^2$$

Despejamos la velocidad:

$$v = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}$$

Sustituimos:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 4500}{1000}}$$

$$v = \sqrt{9}$$

$$v = 3 \text{ m/s}$$

Por tanto:

$$\boxed{v = 3 \text{ m/s}}$$

La diferencia de presión permite medir la velocidad del fluido.

Ejercicio 40. Bernoulli con altura y cambio de velocidad

El agua circula desde un punto 1 hasta un punto 2 situado 5 m más alto.
En el punto 1, la presión es $p_1 = 220000$ Pa y la velocidad es $v_1 = 2$ m/s.
En el punto 2, la velocidad es $v_2 = 4$ m/s.
Calcula la presión p_2.

Datos: $\rho = 1000\ \mathrm{kg/m^3}$ y $g = 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$.

Solución.
Aplicamos Bernoulli entre los puntos 1 y 2.
Como el punto 2 está más alto y, además, la velocidad en el punto 2 es mayor, esperamos que la presión final sea menor que la inicial.
Usamos Bernoulli despejado para p_2:

$$p_2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2) + \rho g(h_1 - h_2)$$

Como el punto 2 está 5 m más alto:

$$h_2 - h_1 = 5\ \mathrm{m}$$

Por tanto:

$$h_1 - h_2 = -5\ \mathrm{m}$$

Calculamos el término debido al cambio de velocidad:

$$\frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2) = 500(2^2 - 4^2)$$

$$\frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2) = 500(4 - 16)$$

$$\frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2) = -6000\ \mathrm{Pa}$$

Calculamos el término debido a la altura:

$$\rho g(h_1 - h_2) = 1000 \cdot 9{,}8 \cdot (-5)$$

$$\rho g(h_1 - h_2) = -49000\ \mathrm{Pa}$$

Sustituimos en la expresion de p_2:

$$p_2 = 220000 - 6000 - 49000$$

$$p_2 = 165000\ \mathrm{Pa}$$

Por tanto:

$$\boxed{p_2 = 165000\ \mathrm{Pa}}$$

La presión final es menor que la inicial porque el agua sube y además aumenta su velocidad.

Bloque E. Viscosidad, régimen de flujo, tensión superficial y problemas integradores

Los fluidos reales no son perfectos. Presentan viscosidad, pérdidas de energía, rozamiento interno y fenómenos de superficie.
En este bloque aparecen varias ideas importantes.
Fuerza viscosa de Stokes
Para una esfera pequeña que se mueve lentamente en un fluido viscoso:

$$F_v = 6\pi\eta r v$$

donde η es la viscosidad del fluido, r el radio de la esfera y v su velocidad.
Velocidad terminal de una esfera en régimen de Stokes
Cuando una esfera cae en un fluido viscoso, puede alcanzar una velocidad constante llamada velocidad terminal. En ese caso, el peso, el empuje y la fuerza viscosa quedan equilibrados:

$$v_t = \frac{2(\rho_e - \rho_f)gr^2}{9\eta}$$

Esta expresión se obtiene combinando el peso de la esfera, el empuje de Arquímedes y la fuerza viscosa de Stokes.
Número de Reynolds
El número de Reynolds permite estimar si un flujo es laminar o turbulento:

$$Re = \frac{\rho v D}{\eta}$$

En tuberías, de forma orientativa, valores pequeños indican flujo laminar y valores grandes indican flujo turbulento.
Caudal y velocidad media
El caudal se relaciona con el área de la sección y la velocidad media mediante:

$$Q = Av$$

Si la sección es circular:

$$A = \pi r^2$$

Ley de Poiseuille
Para flujo laminar en un tubo circular:

$$Q = \frac{\pi r^4 \Delta p}{8\eta L}$$

También puede despejarse la pérdida de presión viscosa:

$$\Delta p = \frac{8\eta L Q}{\pi r^4}$$

Esta ley muestra que el radio del tubo es decisivo, porque aparece elevado a la cuarta potencia.
Tensión superficial
La tensión superficial γ mide la fuerza por unidad de longitud con la que una superficie líquida tira de su borde.
Para una sola superficie:

$$F = \gamma L$$

En una película jabonosa hay dos superficies, una por cada cara de la película. Por eso, si la película tira de un alambre de longitud L, aparece:

$$F = 2\gamma L$$

Capilaridad
El ascenso capilar de un líquido en un tubo fino viene dado por:

$$h = \frac{2\gamma \cos\theta}{\rho g r}$$

El líquido asciende más cuanto menor es el radio del tubo.
Potencia asociada a una pérdida de presión
Si un fluido circula con caudal Q y hay una pérdida de presión Δp, la potencia asociada a esa pérdida es:

$$P = \Delta p\, Q$$

Potencia hidráulica para elevar un fluido
Si una bomba eleva un fluido hasta una altura h, la potencia hidráulica mínima necesaria es:

$$P_h = \rho g Q h$$

Si la bomba tiene rendimiento R, la potencia que debe suministrar el motor es:

$$P_m = \frac{P_h}{R}$$

La física de fluidos conecta la vida cotidiana con la ingeniería, la meteorología, la medicina y la tecnología.

Ejercicio 41. Fuerza viscosa de Stokes

Una pequeña esfera de radio $r = 1{,}0 \cdot 10^{-3}$ m se mueve en un líquido con velocidad $v = 0{,}20$ m/s.
La viscosidad del líquido es $\eta = 0{,}80$ Pa · s.
Calcula la fuerza viscosa usando la ley de Stokes.

Solución.
La ley de Stokes nos da la fuerza de rozamiento viscoso sobre una esfera pequeña que se mueve lentamente en un fluido:

$$F = 6\pi\eta r v$$

Sustituimos:

$$F = 6\pi \cdot 0{,}80 \cdot 1{,}0 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}20$$

$$F = 0{,}00096\pi \text{ N}$$

$$F \approx 3{,}0 \cdot 10^{-3} \text{ N}$$

Por tanto:

$$\boxed{F \approx 3{,}0 \cdot 10^{-3} \text{ N}}$$

La fuerza viscosa se opone al movimiento de la esfera.

Ejercicio 42. Velocidad terminal en un líquido viscoso

Una pequeña esfera de radio $r = 1{,}0 \cdot 10^{-3}$ m cae en un líquido viscoso.
La densidad de la esfera es $\rho_e = 2500$ kg/m^3 y la densidad del fluido es $\rho_f = 1000$ kg/m^3.
La viscosidad del fluido es $\eta = 0{,}90$ Pa · s.
Calcula la velocidad terminal de la esfera.

Dato: $g = 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$.

Solución.
Cuando la esfera alcanza la velocidad terminal, ya no acelera.
En ese momento, el peso menos el empuje queda equilibrado por la fuerza viscosa.
Para una esfera pequeña en régimen de Stokes, la velocidad terminal es:

$$v_t = \frac{2(\rho_e - \rho_f)gr^2}{9\eta}$$

Sustituimos:

$$v_t = \frac{2(2500 - 1000) \cdot 9{,}8 \cdot (1{,}0 \cdot 10^{-3})^2}{9 \cdot 0{,}90}$$

$$v_t = \frac{2 \cdot 1500 \cdot 9{,}8 \cdot 10^{-6}}{8{,}1}$$

$$v_t = \frac{0{,}0294}{8{,}1}$$

$$v_t \approx 0{,}00363\ \mathrm{m/s}$$

Por tanto:

$$\boxed{v_t \approx 3{,}6 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m/s}}$$

La esfera cae muy lentamente porque el fluido es bastante viscoso.

Ejercicio 43. Número de Reynolds y tipo de flujo

Agua circula por una tubería de diámetro $D = 0{,}020$ m con velocidad $v = 1{,}5\ \mathrm{m/s}$.
Datos: $\rho = 1000\ \mathrm{kg/m^3}$ y $\eta = 1{,}0 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{Pa \cdot s}$.
Calcula el número de Reynolds e interpreta el tipo de flujo.

Solución.
El número de Reynolds permite estimar si el flujo es laminar o turbulento.
Usamos:

$$Re = \frac{\rho v D}{\eta}$$

Sustituimos:

$$Re = \frac{1000 \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}020}{1{,}0 \cdot 10^{-3}}$$

$$Re = \frac{30}{0{,}001}$$

$$Re = 30000$$

Por tanto:

$$\boxed{Re = 30000}$$

Como es un valor alto, el flujo será turbulento.
De forma orientativa, en tuberias:

$$Re < 2000$$

suele indicar flujo laminar, mientras que valores mucho mayores suelen indicar flujo turbulento.

Ejercicio 44. Caudal de Poiseuille

Un líquido viscoso circula por un tubo de radio $r = 2{,}0 \cdot 10^{-3}$ m y longitud $L = 0{,}50$ m.
La viscosidad del líquido es $\eta = 0{,}10$ Pa $\cdot$ s y la diferencia de presión entre los extremos del tubo es $\Delta p = 2000$ Pa.
Calcula el caudal usando la ley de Poiseuille.

Solución.
Para flujo laminar en un tubo circular, la ley de Poiseuille dice:

$$Q = \frac{\pi r^4 \Delta p}{8\eta L}$$

Sustituimos:

$$Q = \frac{\pi (2{,}0 \cdot 10^{-3})^4 \cdot 2000}{8 \cdot 0{,}10 \cdot 0{,}50}$$

Calculamos la potencia cuarta del radio:

$$(2{,}0 \cdot 10^{-3})^4 = 16 \cdot 10^{-12}$$

$$(2{,}0 \cdot 10^{-3})^4 = 1{,}6 \cdot 10^{-11}$$

Entonces:

$$Q = \frac{\pi \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-11} \cdot 2000}{0{,}4}$$

$$Q \approx 2{,}51 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3/\text{s}$$

Por tanto:

$$\boxed{Q \approx 2{,}5 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3/\text{s}}$$

Ejercicio 45. Efecto del radio en el caudal

Segun la ley de Poiseuille, para un mismo fluido, una misma longitud de tubo y una misma diferencia de presión:

$$Q \propto r^4$$

Si el radio de un tubo se duplica, ¿por cuánto se multiplica el caudal?

Solución.
Si el radio inicial es r, el caudal inicial es proporcional a:

$$Q \propto r^4$$

Si el radio se duplica:

$$r' = 2r$$

El nuevo caudal será proporcional a:

$$Q' \propto (2r)^4$$

Calculamos:

$$(2r)^4 = 2^4 r^4 = 16r^4$$

Por tanto:

$$\boxed{Q' = 16Q}$$

El caudal se multiplica por 16.
Este resultado es muy importante: pequenos cambios en el radio pueden producir enormes cambios en el caudal.

Ejercicio 46. Capilaridad

El agua asciende por un tubo capilar de radio $r = 0{,}50$ mm.
La tensión superficial del agua es $\gamma = 0{,}072$ N/m.
Suponemos que el ángulo de contacto es aproximadamente 0°, por lo que $\cos\theta \approx 1$.
Calcula la altura aproximada que alcanza el agua en el tubo.
Datos: $\rho = 1000$ kg/m^3 y $g = 9{,}8$ m/s^2.

Solución.
La altura de ascenso capilar viene dada por:

$$h = \frac{2\gamma\cos\theta}{\rho g r}$$

Primero pasamos el radio a metros:

$$0{,}50 \text{ mm} = 0{,}50 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$0{,}50 \text{ mm} = 5{,}0 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

Sustituimos:

$$h = \frac{2 \cdot 0{,}072 \cdot 1}{1000 \cdot 9{,}8 \cdot 5{,}0 \cdot 10^{-4}}$$

$$h = \frac{0{,}144}{4{,}9}$$

$$h \approx 0{,}0294 \text{ m}$$

Por tanto:

$$\boxed{h \approx 0{,}029 \text{ m}}$$

Es decir:

$$\boxed{h \approx 2{,}9 \text{ cm}}$$

El agua sube más en tubos muy finos porque el radio aparece en el denominador.

Ejercicio 47. Tensión superficial en una película jabonosa

Una película jabonosa tira de un alambre móvil de longitud $L = 0{,}12$ m con una fuerza $F = 0{,}017$ N.
Como una película jabonosa tiene dos superficies, usamos:

$$F = 2\gamma L$$

Calcula la tensión superficial γ.

Solución.
Partimos de:

$$F = 2\gamma L$$

Despejamos la tensión superficial:

$$\gamma = \frac{F}{2L}$$

Sustituimos:

$$\gamma = \frac{0{,}017}{2 \cdot 0{,}12}$$

$$\gamma = \frac{0{,}017}{0{,}24}$$

$$\gamma \approx 0{,}0708 \text{ N/m}$$

Por tanto:

$$\boxed{\gamma \approx 0{,}071 \text{ N/m}}$$

El factor 2 aparece porque la película tiene dos superficies.

Ejercicio 48. Pérdida de presión y potencia disipada

En una tubería horizontal, la presión al inicio es $p_1 = 300000$ Pa y al final es $p_2 = 260000$ Pa.
El caudal que circula es $Q = 0{,}015$ m^3/s.
Calcula la pérdida de presión y la potencia disipada por esa pérdida.

Solución.
La pérdida de presión es:

$$\Delta p = p_1 - p_2$$

Sustituimos:

$$\Delta p = 300000 - 260000$$

$$\Delta p = 40000 \text{ Pa}$$

Ahora calculamos la potencia asociada a esa pérdida de presión:

$$P = \Delta p\, Q$$

Sustituimos:

$$P = 40000 \cdot 0{,}015$$

$$P = 600 \text{ W}$$

Por tanto:

$$\boxed{\Delta p = 40000 \text{ Pa}}$$

$$\boxed{P = 600 \text{ W}}$$

La pérdida de presión representa energía mecánica que se disipa por rozamiento interno y rozamiento con las paredes.

Ejercicio 49. Potencia de una bomba con rendimiento

Una bomba eleva agua con un caudal $Q = 0{,}020 \text{ m}^3/\text{s}$ hasta una altura $h = 12$ m.
El rendimiento de la bomba es $R = 0{,}70$.
Calcula la potencia hidráulica mínima y la potencia que debe suministrar el motor.
Datos: $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ y $g = 9{,}8 \text{ m/s}^2$.

Solución.
La potencia hidráulica mínima necesaria para elevar el agua es:

$$P_h = \rho g Q h$$

Sustituimos:

$$P_h = 1000 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}020 \cdot 12$$

$$P_h = 2352 \text{ W}$$

Esta sería la potencia si la bomba fuese ideal.
Como el rendimiento es $R = 0{,}70$, la potencia que debe suministrar el motor es:

$$P_m = \frac{P_h}{R}$$

Sustituimos:

$$P_m = \frac{2352}{0{,}70}$$

$$P_m = 3360 \text{ W}$$

Por tanto:

$$\boxed{P_h = 2352 \text{ W}}$$

$$\boxed{P_m = 3360 \text{ W}}$$

Aproximadamente:

$$\boxed{P_m \approx 3{,}36 \text{ kW}}$$

Ejercicio 50. Problema final integrador

Un aceite de densidad $\rho = 900 \text{ kg/m}^3$ y viscosidad $\eta = 0{,}20 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ circula por una tubería de radio $r = 5{,}0 \cdot 10^{-3}$ m y longitud $L = 20$ m.
El caudal es $Q = 1{,}0 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$.
La tubería eleva el aceite hasta una altura $h = 6$ m.
El rendimiento de la bomba es $R = 0{,}70$.
Calcula:

a) la velocidad media del aceite;
b) el número de Reynolds;
c) la pérdida de presión viscosa en la tubería;
d) la potencia que debe suministrar el motor de la bomba.
Dato: $g = 9{,}8 \text{ m/s}^2$.

Solución.
a) Velocidad media
El área de la sección de la tubería es:

$$A = \pi r^2$$

Sustituimos:

$$A = \pi(5{,}0 \cdot 10^{-3})^2$$

$$A = \pi \cdot 25 \cdot 10^{-6}$$

$$A \approx 7{,}85 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$$

Como:

$$Q = Av$$

despejamos:

$$v = \frac{Q}{A}$$

Sustituimos:

$$v = \frac{1{,}0 \cdot 10^{-5}}{7{,}85 \cdot 10^{-5}}$$

$$v \approx 0{,}127 \text{ m/s}$$

Por tanto:

$$\boxed{v \approx 0{,}127 \text{ m/s}}$$

b) Número de Reynolds
El diámetro de la tubería es:

$$D = 2r = 2 \cdot 5{,}0 \cdot 10^{-3}$$

$$D = 1{,}0 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

Usamos:

$$Re = \frac{\rho v D}{\eta}$$

Sustituimos:

$$Re = \frac{900 \cdot 0{,}127 \cdot 1{,}0 \cdot 10^{-2}}{0{,}20}$$

$$Re \approx 5{,}7$$

Por tanto:

$$\boxed{Re \approx 5{,}7}$$

El valor es muy bajo, así que el flujo es laminar.

c) Pérdida de presión viscosa

Como el flujo es laminar, podemos usar la ley de Poiseuille:

$$Q = \frac{\pi r^4 \Delta p_v}{8\eta L}$$

Despejamos la pérdida de presión viscosa:

$$\Delta p_v = \frac{8\eta L Q}{\pi r^4}$$

Sustituimos:

$$\Delta p_v = \frac{8 \cdot 0{,}20 \cdot 20 \cdot 1{,}0 \cdot 10^{-5}}{\pi (5{,}0 \cdot 10^{-3})^4}$$

Calculamos primero:

$$(5{,}0 \cdot 10^{-3})^4 = 6{,}25 \cdot 10^{-10}$$

Entonces:

$$\Delta p_v = \frac{3{,}2 \cdot 10^{-4}}{\pi \cdot 6{,}25 \cdot 10^{-10}}$$

$$\Delta p_v \approx 1{,}63 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Por tanto:

$$\boxed{\Delta p_v \approx 1{,}63 \cdot 10^5 \text{ Pa}}$$

d) Potencia que debe suministrar el motor

La bomba debe vencer dos efectos:

la subida en altura y la pérdida viscosa en la tubería.

La presión equivalente debida a la altura es:

$$\Delta p_h = \rho g h$$

Sustituimos:

$$\Delta p_h = 900 \cdot 9{,}8 \cdot 6$$

$$\Delta p_h = 52920 \text{ Pa}$$

La diferencia de presión total que debe vencer la bomba es:

$$\Delta p_T = \Delta p_v + \Delta p_h$$

Sustituimos:

$$\Delta p_T = 1{,}63 \cdot 10^5 + 52920$$

$$\Delta p_T \approx 2{,}16 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

La potencia hidráulica necesaria es:

$$P_h = \Delta p_T Q$$

Sustituimos:

$$P_h = 2{,}16 \cdot 10^5 \cdot 1{,}0 \cdot 10^{-5}$$

$$P_h \approx 2{,}16 \text{ W}$$

Como el rendimiento de la bomba es $R = 0{,}70$, la potencia del motor debe ser:

$$P_m = \frac{P_h}{R}$$

Sustituimos:

$$P_m = \frac{2{,}16}{0{,}70}$$

$$P_m \approx 3{,}09 \text{ W}$$

Por tanto:

$$\boxed{P_m \approx 3{,}1 \text{ W}}$$

Este problema integra caudal, velocidad media, número de Reynolds, ley de Poiseuille, pérdida de presión viscosa y potencia de bombeo. Es un buen resumen de los fluidos reales.

Estos problemas los tienes resueltos en formato vídeo aquí:
`https://youtu.be/5Jf1OyG0xh4`