

50 ejercicios de lógica desde cero

Ejercicios sencillos para entender lo más importante de la lógica

MATEMÁTICAS CON JUAN

Documento preparado para clase, vídeo y estudio personal.

Canal: <https://www.youtube.com/@matematicaconjuan>

Versión vídeo de estos ejercicios aquí:

<https://youtu.be/bgugRWRArL8>

Juan Pascual

8 de mayo de 2026

Índice

Cómo usar este documento	II
Índice de bloques	II
Conectores básicos	II
1. Proposiciones lógicas	1
2. Valor de verdad: verdadero o falso	2
3. Negación de proposiciones	4
4. Conjunción: el conector “y”	6
5. Disyunción: el conector “o”	8
6. Condicional: “si..., entonces...”	9
7. Bicondicional: “si y solo si”	11
8. Tablas de verdad	13
9. Leyes lógicas básicas	15
10. Cuantificadores y razonamientos	17
Resumen final	20

Cómo usar este documento

La lógica matemática estudia la forma correcta de razonar. En este documento vamos a aprenderla de manera progresiva, a través de **50 ejercicios sencillos**, explicados paso a paso.

La idea no es memorizar símbolos sin sentido, sino entender qué significa cada construcción lógica y cómo se usa en matemáticas.

Idea clave

En lógica, muchas frases se estudian únicamente desde el punto de vista de si son **verdaderas** o **falsas**. Eso permite analizar razonamientos con precisión, sin depender de la intuición o del lenguaje ambiguo.

Índice de bloques

Ejercicios	Contenido principal
1–5	Proposiciones lógicas
6–10	Valor de verdad: verdadero o falso
11–15	Negación de proposiciones
16–20	Conjunción: el conector “y”
21–25	Disyunción: el conector “o”
26–30	Condiciona: “si..., entonces...”
31–35	Bicondiciona: “si y solo si”
36–40	Tablas de verdad
41–45	Leyes lógicas básicas
46–50	Cuantificadores y razonamientos

Conectores básicos

Símbolo	Lectura	Significado
$\neg p$	no p	Negación de una proposición.
$p \wedge q$	p y q	Conjunción: las dos deben ser verdaderas.
$p \vee q$	p o q	Disyunción inclusiva: basta con que una sea verdadera.
$p \Rightarrow q$	si p , entonces q	Condiciona: solo falla si p es verdadera y q falsa.
$p \Leftrightarrow q$	p si y solo si q	Bicondiciona: ambas tienen el mismo valor de verdad.

1 Proposiciones lógicas

Una **proposición lógica** es una oración de la que tiene sentido decir que es verdadera o falsa. Las órdenes, las preguntas y las expresiones con variables libres no suelen ser proposiciones completas.

Ejercicio 1. Decidir si una igualdad es una proposición

Indica si la frase siguiente es una proposición lógica:

$$7 + 3 = 10.$$

Solución.

Sí, es una proposición lógica, porque tiene sentido preguntarse si es verdadera o falsa.

En este caso, además,

$$7 + 3 = 10$$

es una afirmación verdadera.

Por tanto:

Es una proposición lógica verdadera.

Lo importante no es que sea verdadera, sino que pueda tener un valor de verdad. Una frase falsa también puede ser una proposición lógica.

Ejercicio 2. Decidir si una orden es una proposición

Indica si la frase siguiente es una proposición lógica:

Cierra la puerta.

Solución.

No es una proposición lógica.

La frase “Cierra la puerta” es una orden. No tiene sentido decir que esa orden sea verdadera o falsa. Se puede obedecer o no obedecer, pero no se clasifica como verdadera o falsa.

Por tanto:

No es una proposición lógica.

En lógica matemática nos interesan especialmente las frases declarativas, no las órdenes ni las preguntas.

Ejercicio 3. Decidir si una frase cotidiana es proposición

Indica si la frase siguiente es una proposición lógica:

Madrid es la capital de España.

Solución.

Sí, es una proposición lógica, porque afirma algo que puede ser verdadero o falso.

En este caso, la afirmación es verdadera:

Madrid es la capital de España.

Por tanto:

Es una proposición lógica verdadera.

Este ejemplo muestra que las proposiciones no tienen por qué ser solo matemáticas. También pueden aparecer en el lenguaje cotidiano.

Ejercicio 4. Una expresión con variable

Indica si la expresión siguiente es una proposición lógica:

$$x + 2 = 5.$$

Solución.

Tal como está escrita, no es una proposición completa, porque depende del valor de x .

Si $x = 3$, entonces:

$$3 + 2 = 5$$

y la frase sería verdadera. Pero si $x = 1$, entonces:

$$1 + 2 = 5$$

y sería falsa.

Como no se ha especificado qué vale x , la expresión no tiene todavía un valor de verdad determinado.

Por tanto:

No es una proposición lógica cerrada.

Para convertirla en proposición habría que decir, por ejemplo: “para $x = 3$, se cumple $x + 2 = 5$ ”.

Ejercicio 5. Decidir si una pregunta es proposición

Indica si la frase siguiente es una proposición lógica:

¿Qué hora es?

Solución.

No es una proposición lógica.

La frase es una pregunta. Las preguntas pueden responderse, pero no se consideran verdaderas o falsas en el sentido lógico.

Por tanto:

No es una proposición lógica.

Una forma de transformarla en proposición sería escribir una afirmación concreta, por ejemplo:

Son las ocho de la tarde.

Esa frase sí podría ser verdadera o falsa.

2 Valor de verdad: verdadero o falso

El **valor de verdad** de una proposición es si la proposición es verdadera o falsa. Normalmente usamos V para verdadero y F para falso.

Ejercicio 6. Comparación numérica verdadera

Determina el valor de verdad de la proposición:

$$5 < 8.$$

Solución.

La proposición dice que 5 es menor que 8.

Esto es cierto, porque en la recta numérica el número 5 está a la izquierda del número 8.

Por tanto:

$$5 < 8 \text{ es verdadera.}$$

En símbolos, podemos escribir:

V

Ejercicio 7. Múltiplos

Determina el valor de verdad de la proposición:

$$12 \text{ es múltiplo de } 5.$$

Solución.

Decir que 12 es múltiplo de 5 significaría que existe un número entero k tal que:

$$12 = 5k.$$

Pero los múltiplos de 5 son:

$$\dots, -10, -5, 0, 5, 10, 15, 20, \dots$$

y 12 no aparece en esa lista.

Por tanto:

$$12 \text{ es múltiplo de } 5 \text{ es falso.}$$

En símbolos:

F

Ejercicio 8. Potencias

Determina el valor de verdad de la proposición:

$$3^2 = 9.$$

Solución.

Calculamos:

$$3^2 = 3 \cdot 3 = 9.$$

La igualdad es correcta.

Por tanto:

$$3^2 = 9 \text{ es verdadera.}$$

En símbolos:

V

Este ejemplo es sencillo, pero sirve para recordar que una proposición matemática puede evaluarse mediante cálculo.

Ejercicio 9. Raíz cuadrada

Determina el valor de verdad de la proposición:

$$\sqrt{16} = 5.$$

Solución.

La raíz cuadrada principal de 16 es 4, porque:

$$4^2 = 16.$$

Por tanto:

$$\sqrt{16} = 4,$$

no 5.

La proposición dada es falsa:

$$\boxed{\sqrt{16} = 5 \text{ es falsa.}}$$

En símbolos:

\boxed{F}

Ejercicio 10. Comparación con números negativos

Determina el valor de verdad de la proposición:

$$0 < -2.$$

Solución.

La proposición dice que 0 es menor que -2.

Pero en la recta numérica, -2 está a la izquierda de 0. Por tanto:

$$-2 < 0,$$

no al revés.

Así que:

$$\boxed{0 < -2 \text{ es falsa.}}$$

En símbolos:

\boxed{F}

3 Negación de proposiciones

La **negación** de una proposición p se escribe $\neg p$ y significa “no p ”. Si p es verdadera, $\neg p$ es falsa. Si p es falsa, $\neg p$ es verdadera.

Ejercicio 11. Negar una frase cotidiana

Niega la proposición:

$$p : \text{Hoy llueve.}$$

Solución.

La negación consiste en afirmar que no ocurre lo que dice p .

Si:

$$p : \text{Hoy llueve,}$$

entonces:

$$\neg p : \text{Hoy no llueve.}$$

Por tanto:

$$\boxed{\neg p : \text{Hoy no llueve.}}$$

La idea esencial es que p y $\neg p$ siempre tienen valores de verdad opuestos.

Ejercicio 12. Negar una frase con “todos”

Niega la proposición:

$$p : \text{Todos los alumnos aprobaron.}$$

Solución.

La negación de “todos aprobaron” no es “nadie aprobó”.

Para que sea falso que todos aprobaron, basta con que al menos un alumno no haya aprobado.

Por tanto:

$$\neg p : \text{Al menos un alumno no aprobó.}$$

También podríamos decir:

$$\text{Existe algún alumno que no aprobó.}$$

Este es un error muy común: negar “todos” no significa pasar a “ninguno”, sino a “al menos uno no”.

Ejercicio 13. Negar una frase con “algún”

Niega la proposición:

$$p : \text{Algún número par es primo.}$$

Solución.

La frase dice que existe al menos un número que es par y primo.

Negarla significa decir que no existe ningún número con esas dos propiedades a la vez.

Por tanto:

$$\neg p : \text{Ningún número par es primo.}$$

También se puede expresar así:

$$\text{Todo número par no es primo.}$$

Matemáticamente, esta negación no coincide con la realidad, porque 2 es par y primo. Pero aquí lo importante es aprender a negar correctamente.

Ejercicio 14. Negar una desigualdad estricta

Niega la proposición:

$$p : 7 > 3.$$

Solución.

Negar $7 > 3$ significa decir que no es cierto que 7 sea mayor que 3.

La negación de “mayor que” es “menor o igual que”.

Por tanto:

$$\neg p : 7 \leq 3.$$

Así que:

$$\neg(7 > 3) \equiv 7 \leq 3.$$

Observa que no basta con escribir $7 < 3$, porque también hay que incluir la posibilidad de igualdad.

Ejercicio 15. Negar una desigualdad con igualdad

Niega la proposición:

$$p : x \geq 4.$$

Solución.

La proposición $x \geq 4$ significa:

$$x \text{ es mayor o igual que } 4.$$

Su negación es que x no sea mayor ni igual que 4. Eso quiere decir que x es estrictamente menor que 4.

Por tanto:

$$\neg(x \geq 4) \equiv x < 4.$$

En general:

$$\neg(x \geq a) \equiv x < a.$$

4 Conjunción: el conector “y”

La conjunción $p \wedge q$ se lee “ p y q ”. Es verdadera solamente cuando p y q son ambas verdaderas.

Ejercicio 16. Conjunción de dos proposiciones verdaderas

Sean

$$p : 2 + 3 = 5, \quad q : 4 < 10.$$

Halla el valor de verdad de:

$$p \wedge q.$$

Solución.

Primero estudiamos cada proposición por separado.

Tenemos:

$$2 + 3 = 5,$$

por tanto p es verdadera.

También:

$$4 < 10,$$

por tanto q es verdadera.

La conjunción $p \wedge q$ solo es verdadera cuando las dos partes son verdaderas.

Así que:

$$p \wedge q \text{ es verdadera.}$$

En forma resumida:

$$V \wedge V = V.$$

Ejercicio 17. Conjunción con una parte falsa

Sean

$$p : 6 \text{ es par}, \quad q : 6 \text{ es primo.}$$

Halla el valor de verdad de:

$$p \wedge q.$$

Solución.

Analizamos las dos partes.

La proposición p es verdadera, porque 6 es divisible entre 2.

La proposición q es falsa, porque 6 no es primo: tiene divisores distintos de 1 y de 6, por ejemplo 2 y 3.

Entonces:

$$p \wedge q = V \wedge F.$$

Una conjunción con una parte falsa es falsa.

Por tanto:

$$p \wedge q \text{ es falsa.}$$

Ejercicio 18. Otra conjunción con una parte falsa

Sean

$$p : 9 > 4, \quad q : 1 > 5.$$

Halla el valor de verdad de:

$$p \wedge q.$$

Solución.La proposición p es verdadera, porque 9 es mayor que 4.La proposición q es falsa, porque 1 no es mayor que 5.

Por tanto:

$$p \wedge q = V \wedge F = F.$$

Así que:

$$p \wedge q \text{ es falsa.}$$

La conjunción es exigente: necesita que todo lo que une sea verdadero.

Ejercicio 19. Conjunción con frases científicas

Sean

$$p : \text{El Sol es una estrella,}$$

$$q : \text{La Luna es un planeta.}$$

Halla el valor de verdad de:

$$p \wedge q.$$

Solución.La proposición p es verdadera: el Sol es una estrella.La proposición q es falsa: la Luna no es un planeta, sino un satélite natural de la Tierra.

Por tanto:

$$p \wedge q = V \wedge F = F.$$

Así que:

$$p \wedge q \text{ es falsa.}$$

Aunque una de las frases sea verdadera, la conjunción completa falla porque la otra parte es falsa.

Ejercicio 20. Construir una frase con conjunción

Construye una frase cotidiana que represente:

$$p \wedge q.$$

Solución.

Una frase con conjunción debe unir dos afirmaciones mediante la palabra “y”.

Por ejemplo, podemos tomar:

$$p : \text{Estudio matemáticas,}$$

$$q : \text{hago ejercicios.}$$

Entonces:

$$p \wedge q : \text{Estudio matemáticas y hago ejercicios.}$$

Por tanto, una posible respuesta es:

$$\text{Estudio matemáticas y hago ejercicios.}$$

Esta frase será verdadera únicamente si las dos partes son verdaderas a la vez.

5 Disyunción: el conector “o”

La disyunción $p \vee q$ se lee “ p o q ”. En lógica matemática, normalmente es una **o inclusiva**: es verdadera si al menos una de las dos proposiciones es verdadera.

Ejercicio 21. Disyunción con una proposición verdadera

Sean

$$p : 3 < 5, \quad q : 8 < 2.$$

Halla el valor de verdad de:

$$p \vee q.$$

Solución.

La proposición p es verdadera, porque 3 es menor que 5.

La proposición q es falsa, porque 8 no es menor que 2.

Entonces:

$$p \vee q = V \vee F.$$

La disyunción es verdadera si al menos una de las partes es verdadera.

Por tanto:

$$p \vee q \text{ es verdadera.}$$

Ejercicio 22. Disyunción con dos proposiciones verdaderas

Sean

$$p : 10 \text{ es múltiplo de } 2,$$

$$q : 10 \text{ es múltiplo de } 5.$$

Halla el valor de verdad de:

$$p \vee q.$$

Solución.

La proposición p es verdadera, porque:

$$10 = 2 \cdot 5.$$

La proposición q también es verdadera, porque:

$$10 = 5 \cdot 2.$$

Por tanto:

$$p \vee q = V \vee V = V.$$

Así que:

$$p \vee q \text{ es verdadera.}$$

Este ejemplo muestra que el “o” lógico suele ser inclusivo: permite que las dos afirmaciones sean verdaderas simultáneamente.

Ejercicio 23. Disyunción entre par e impar

Sean

$$p : 7 \text{ es par}, \quad q : 7 \text{ es impar.}$$

Halla el valor de verdad de:

$$p \vee q.$$

Solución.

La proposición p es falsa, porque 7 no es par.

La proposición q es verdadera, porque 7 sí es impar.

Entonces:

$$p \vee q = F \vee V = V.$$

Por tanto:

$$p \vee q \text{ es verdadera.}$$

En una disyunción basta con que una parte sea verdadera para que toda la proposición sea verdadera.

Ejercicio 24. Disyunción con dos proposiciones falsas

Sean

$$p : 4 > 9, \quad q : 2 > 6.$$

Halla el valor de verdad de:

$$p \vee q.$$

Solución.

La proposición p es falsa, porque 4 no es mayor que 9.

La proposición q también es falsa, porque 2 no es mayor que 6.

Entonces:

$$p \vee q = F \vee F = F.$$

Por tanto:

$$p \vee q \text{ es falsa.}$$

Esta es la única situación en la que una disyunción inclusiva es falsa: cuando las dos partes son falsas.

Ejercicio 25. Explicar cuándo es falsa una disyunción

Explica con palabras cuándo es falsa una disyunción:

$$p \vee q.$$

Solución.

La disyunción $p \vee q$ significa “ p o q ”.

En lógica inclusiva, esa frase es verdadera si ocurre al menos una de las dos cosas:

- que p sea verdadera;
- que q sea verdadera;
- que ambas sean verdaderas.

Por tanto, solo será falsa cuando no ocurra ninguna de las dos.

Es decir:

$$p \vee q \text{ es falsa solamente si } p \text{ y } q \text{ son falsas.}$$

En símbolos:

$$F \vee F = F.$$

6 Condicional: “si..., entonces...”

El condicional $p \Rightarrow q$ se lee “si p , entonces q ”. La proposición p se llama **antecedente** y la proposición q se llama **consecuente**.

Idea clave

El condicional $p \Rightarrow q$ solo es falso cuando el antecedente p es verdadero y el consecuente q es falso. En todos los demás casos se considera verdadero.

Ejercicio 26. Condicional verdadero

Estudia el valor de verdad de:

$$p \Rightarrow q,$$

donde

$$p : 4 \text{ es par}, \quad q : 4 \text{ es divisible entre } 2.$$

Solución.

La proposición p es verdadera, porque 4 es par.

La proposición q también es verdadera, porque 4 es divisible entre 2.

Por tanto:

$$p \Rightarrow q = V \Rightarrow V.$$

Un condicional con antecedente verdadero y consecuente verdadero es verdadero.

Así que:

$$p \Rightarrow q \text{ es verdadero.}$$

Ejercicio 27. Condicional con antecedente falso

Estudia el valor de verdad de:

$$p \Rightarrow q,$$

donde

$$p : 5 \text{ es par}, \quad q : 5 \text{ es divisible entre } 2.$$

Solución.

La proposición p es falsa, porque 5 no es par.

La proposición q también es falsa, porque 5 no es divisible entre 2.

Tenemos:

$$p \Rightarrow q = F \Rightarrow F.$$

En lógica formal, un condicional con antecedente falso se considera verdadero. La razón es que el condicional solo promete algo en caso de que p ocurra. Si p no ocurre, no se ha producido un contraejemplo.

Por tanto:

$$p \Rightarrow q \text{ es verdadero.}$$

Ejercicio 28. El único caso falso del condicional

Estudia el valor de verdad de:

$$p \Rightarrow q,$$

donde

$$p : 6 > 2, \quad q : 6 < 1.$$

Solución.

La proposición p es verdadera, porque $6 > 2$.

La proposición q es falsa, porque 6 no es menor que 1.

Entonces:

$$p \Rightarrow q = V \Rightarrow F.$$

Este es precisamente el único caso en el que un condicional es falso.

Por tanto:

$$p \Rightarrow q \text{ es falso.}$$

La lectura sería: se cumple la condición inicial, pero no se cumple la consecuencia prometida.

Ejercicio 29. Tabla de verdad del condicional

Completa la tabla de verdad de:

$$p \Rightarrow q.$$

Solución.

La tabla de verdad del condicional es:

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

La segunda fila es la más importante:

$$V \Rightarrow F = F.$$

Es decir, el condicional falla solamente cuando el antecedente es verdadero y el consecuente es falso.

Por tanto:

$$p \Rightarrow q \text{ solo es falso en el caso } V \Rightarrow F.$$

Ejercicio 30. Explicar el caso falso del condicional

Explica por qué la única situación en la que el condicional es falso es:

$$p \text{ verdadera y } q \text{ falsa.}$$

Solución.

Un condicional tiene la forma:

$$\text{Si } p, \text{ entonces } q.$$

La frase afirma que siempre que ocurra p , debe ocurrir q .

Por eso, el único modo de romper esa promesa lógica es encontrar una situación en la que p ocurra pero q no ocurra.

Es decir:

$$p \text{ verdadera, } \quad q \text{ falsa.}$$

Por tanto:

$$p \Rightarrow q \text{ es falso solo cuando } p \text{ es verdadera y } q \text{ falsa.}$$

Ese caso se llama muchas veces **contraejemplo** al condicional.

7 Bicondicional: “si y solo si”

El bicondicional $p \Leftrightarrow q$ se lee “ p si y solo si q ”. Es verdadero cuando p y q tienen el mismo valor de verdad.

Ejercicio 31. Bicondicional con dos proposiciones verdaderas

Estudia:

$$p \Leftrightarrow q,$$

donde

$$p : 8 \text{ es par, } \quad q : 8 \text{ es divisible entre 2.}$$

Solución.

La proposición p es verdadera, porque 8 es par.

La proposición q también es verdadera, porque 8 es divisible entre 2.

Por tanto:

$$p \Leftrightarrow q = V \Leftrightarrow V.$$

El bicondicional es verdadero cuando las dos proposiciones tienen el mismo valor de verdad.

Así que:

$$p \Leftrightarrow q \text{ es verdadero.}$$

Ejercicio 32. Bicondicional con valores distintos

Estudia:

$$p \Leftrightarrow q,$$

donde

$$p : 9 \text{ es par, } \quad q : 9 \text{ es divisible entre 3.}$$

Solución.

La proposición p es falsa, porque 9 no es par.

La proposición q es verdadera, porque:

$$9 = 3 \cdot 3.$$

Por tanto:

$$p \Leftrightarrow q = F \Leftrightarrow V.$$

Como los valores de verdad son distintos, el bicondicional es falso.

Así que:

$$p \Leftrightarrow q \text{ es falso.}$$

Ejercicio 33. Tabla de verdad del bicondicional

Completa la tabla de verdad de:

$$p \Leftrightarrow q.$$

Solución.

La tabla de verdad del bicondicional es:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Observamos que $p \Leftrightarrow q$ es verdadero cuando p y q tienen el mismo valor de verdad:

$$V, V \quad \text{o} \quad F, F.$$

Por tanto:

$$p \Leftrightarrow q \text{ significa que } p \text{ y } q \text{ son equivalentes en verdad.}$$

Ejercicio 34. Traducir un bicondicional

Traduce a lenguaje lógico:

Un número es par si y solo si es divisible entre 2.

Solución.

Definimos:

p : El número es par,

q : El número es divisible entre 2.

La expresión “si y solo si” se traduce con el bicondicional:

\Leftrightarrow .

Por tanto, la traducción es:

$$p \Leftrightarrow q.$$

Es decir:

El número es par \Leftrightarrow el número es divisible entre 2.

La frase afirma las dos direcciones: si es par, es divisible entre 2; y si es divisible entre 2, es par.

Ejercicio 35. Diferencia entre condicional y bicondicional

Explica la diferencia entre:

$$p \Rightarrow q$$

y

$$p \Leftrightarrow q.$$

Solución.

El condicional

$$p \Rightarrow q$$

dice solamente que si ocurre p , entonces ocurre q .

Pero no afirma necesariamente la vuelta. Es decir, no afirma que si ocurre q , entonces ocurra p .

En cambio, el bicondicional

$$p \Leftrightarrow q$$

dice las dos cosas a la vez:

$$p \Rightarrow q \quad \text{y} \quad q \Rightarrow p.$$

Por tanto:

$$p \Leftrightarrow q \text{ es más fuerte que } p \Rightarrow q.$$

El bicondicional expresa una equivalencia: p y q van juntas en ambos sentidos.

8 Tablas de verdad

Las tablas de verdad permiten estudiar todas las combinaciones posibles de valores de verdad de una o varias proposiciones.

Ejercicio 36. Tabla de verdad de la negación

Haz la tabla de verdad de:

$$\neg p.$$

Solución.

La negación cambia el valor de verdad de una proposición.

Si p es verdadera, $\neg p$ es falsa. Si p es falsa, $\neg p$ es verdadera.

Por tanto:

p	$\neg p$
V	F
F	V

Así que:

$\neg p$ tiene siempre el valor opuesto de p .

Ejercicio 37. Tabla de verdad de la conjunción

Haz la tabla de verdad de:

$$p \wedge q.$$

Solución.

Para dos proposiciones p y q hay cuatro combinaciones posibles:

$$(V, V), (V, F), (F, V), (F, F).$$

La conjunción solo es verdadera en la primera fila:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Por tanto:

$p \wedge q$ exige que p y q sean verdaderas.

Ejercicio 38. Tabla de verdad de la disyunción

Haz la tabla de verdad de:

$$p \vee q.$$

Solución.

La disyunción inclusiva es verdadera cuando al menos una proposición es verdadera.

La tabla es:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

La única fila falsa es la última:

$$F \vee F = F.$$

Por tanto:

$p \vee q$ solo es falsa cuando ambas son falsas.

Ejercicio 39. Tabla de verdad del condicional

Haz la tabla de verdad de:

$$p \Rightarrow q.$$

Solución.

El condicional solo es falso cuando p es verdadera y q es falsa.

Por tanto:

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

La fila clave es:

$$V \Rightarrow F = F.$$

Así que:

$$p \Rightarrow q \text{ falla únicamente cuando } p \text{ ocurre y } q \text{ no ocurre.}$$

Ejercicio 40. Tabla de verdad de una proposición compuesta

Haz la tabla de verdad de:

$$\neg(p \wedge q).$$

Solución.

Primero calculamos $p \wedge q$ y después negamos el resultado.

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

La conjunción $p \wedge q$ solo es verdadera en la primera fila. Por tanto, su negación solo es falsa en esa primera fila.

Así que:

$$\neg(p \wedge q) \text{ es verdadera salvo cuando } p \text{ y } q \text{ son ambas verdaderas.}$$

9 Leyes lógicas básicas

Las leyes lógicas permiten transformar proposiciones en otras equivalentes. Dos proposiciones son equivalentes si tienen siempre el mismo valor de verdad.

Ejercicio 41. Primera ley de De Morgan

Comprueba con una tabla de verdad que:

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q.$$

Solución.

Construimos una tabla comparando ambos lados.

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$	coinciden
V	V	V	F	F	sí
V	F	F	V	V	sí
F	V	F	V	V	sí
F	F	F	V	V	sí

Las columnas de $\neg(p \wedge q)$ y $\neg p \vee \neg q$ son iguales.

Por tanto:

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q.$$

Esta es una de las leyes de De Morgan.

Ejercicio 42. Segunda ley de De Morgan

Comprueba con una tabla de verdad que:

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q.$$

Solución.

Comparamos las dos proposiciones mediante una tabla.

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$	coinciden
V	V	V	F	F	sí
V	F	V	F	F	sí
F	V	V	F	F	sí
F	F	F	V	V	sí

Las columnas de $\neg(p \vee q)$ y $\neg p \wedge \neg q$ son iguales.

Por tanto:

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q.$$

Esta es la segunda ley de De Morgan.

Ejercicio 43. Doble negación

Simplifica:

$$\neg(\neg p).$$

Solución.

La expresión $\neg p$ significa “no p ”.

Entonces $\neg(\neg p)$ significa “no es cierto que no p ”.

Eso equivale a afirmar p .

Por tanto:

$$\neg(\neg p) \equiv p.$$

Podemos verlo también con una tabla:

p	$\neg p$	$\neg(\neg p)$
V	F	V
F	V	F

La primera y la tercera columna coinciden.

Ejercicio 44. Equivalencia del condicional

Comprueba que:

$$p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q.$$

Solución.

Construimos una tabla con ambas proposiciones.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg p \vee q$	coinciden
V	V	V	V	sí
V	F	F	F	sí
F	V	V	V	sí
F	F	V	V	sí

Las dos columnas tienen exactamente los mismos valores de verdad.

Por tanto:

$$p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q.$$

Esta equivalencia es muy útil para transformar condicionales en expresiones con negación y disyunción.

Ejercicio 45. Interpretar una ley de De Morgan

Explica con un ejemplo cotidiano la ley:

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q.$$

Solución.

Tomemos:

p : Tengo lápiz,

q : Tengo cuaderno.

Entonces:

$p \wedge q$: Tengo lápiz y tengo cuaderno.

La negación es:

$\neg(p \wedge q)$: No es cierto que tenga lápiz y cuaderno.

Eso significa que falta al menos una de las dos cosas:

$\neg p \vee \neg q$: No tengo lápiz o no tengo cuaderno.

Por tanto:

No tener las dos cosas equivale a que falte al menos una.

10 Cuantificadores y razonamientos

Los cuantificadores permiten hablar de todos los elementos de un conjunto o de la existencia de al menos uno.

Símbolo	Lectura	Significado
\forall	para todo	Afirma que algo se cumple para todos los elementos.
\exists	existe	Afirma que hay al menos un elemento que cumple una propiedad.

Ejercicio 46. Traducir una frase con “todos”

Traduce a lenguaje lógico:

Todos los números pares son divisibles entre 2.

Solución.

La palabra “todos” se traduce mediante el cuantificador universal:

$$\forall.$$

Podemos escribir la frase así:

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad n \text{ par} \Rightarrow 2 \mid n.$$

Se lee:

“Para todo número entero n , si n es par, entonces 2 divide a n ”.

El símbolo $2 \mid n$ significa que n es divisible entre 2.

Ejercicio 47. Negar una frase universal

Niega la frase:

Todos los alumnos aprobaron.

Solución.

La frase afirma que todos los alumnos aprobaron.

Para negar una afirmación universal, basta encontrar al menos un caso que no la cumpla.

Por tanto, la negación es:

Existe al menos un alumno que no aprobó.

En lenguaje lógico, si $A(x)$ significa “ x aprobó”, entonces:

$$\neg(\forall x, A(x)) \equiv \exists x \neg A(x).$$

Es decir:

$$\neg\forall = \exists\neg.$$

Ejercicio 48. Negar una frase existencial

Niega la frase:

Existe un número natural mayor que 100.

Solución.

La frase dice que hay al menos un número natural mayor que 100.

Negar eso significa afirmar que no existe ninguno.

Por tanto:

Ningún número natural es mayor que 100.

También puede escribirse como:

Todos los números naturales son menores o iguales que 100.

En lenguaje lógico:

$$\neg(\exists n \in \mathbb{N} : n > 100) \equiv \forall n \in \mathbb{N}, n \leq 100.$$

La frase original es verdadera, pero lo que hemos hecho aquí es construir su negación lógica.

Ejercicio 49. Razonamiento válido: Sócrates

Estudia si el razonamiento es válido:

Todos los humanos son mortales.

Sócrates es humano.

Por tanto, Sócrates es mortal.

Solución.

Este razonamiento tiene la forma:

$$\begin{aligned} \forall x, H(x) \Rightarrow M(x), \\ H(s), \\ \therefore M(s). \end{aligned}$$

Donde:

- $H(x)$ significa “ x es humano”;
- $M(x)$ significa “ x es mortal”;
- s representa a Sócrates.

La primera premisa dice que todo humano es mortal. La segunda dice que Sócrates es humano. Entonces podemos aplicar la regla general a Sócrates.

Por tanto:

El razonamiento es válido.

Esta forma de razonar se conoce como **modus ponens**.

Ejercicio 50. Una trampa lógica clásica

Estudia si el razonamiento es válido:

Si llueve, el suelo se moja.

El suelo está mojado.

Por tanto, ha llovido.

Solución.

Representemos:

$$\begin{aligned} p : \text{ Llueve,} \\ q : \text{ El suelo se moja.} \end{aligned}$$

La primera premisa es:

$$p \Rightarrow q.$$

La segunda premisa afirma:

$$q.$$

La conclusión propuesta es:

$$p.$$

Pero de $p \Rightarrow q$ y q no se puede deducir necesariamente p .

El suelo podría estar mojado por otras razones: alguien lo ha regado, se ha roto una tubería o ha pasado un camión de limpieza.

Por tanto:

El razonamiento no es válido.

El error se llama **afirmación del consecuente**.

Resumen final

Resumen final

En estos 50 ejercicios hemos trabajado las ideas básicas de la lógica matemática:

- qué es una proposición lógica;
- cómo distinguir verdadero y falso;
- cómo negar proposiciones;
- cómo funcionan los conectores \wedge , \vee , \Rightarrow y \Leftrightarrow ;
- cómo construir tablas de verdad;
- cómo usar leyes lógicas como las leyes de De Morgan;
- cómo aparecen los cuantificadores \forall y \exists ;
- cómo detectar razonamientos válidos y trampas lógicas.

La lógica es una herramienta fundamental porque ayuda a pensar con precisión. No se trata solo de símbolos: se trata de aprender a razonar mejor.

MATEMÁTICAS CON JUAN

<https://www.youtube.com/@matematicaconjuan>

Versión vídeo de estos ejercicios aquí:

<https://youtu.be/bgugRWRArL8>