

100 problemas de cálculo integral

desde cero, paso a paso y sin desmoralizar

Colección variada, ligera y progresiva: ejercicios breves, motivadores y completamente resueltos para estudiantes que necesitan ganar seguridad.

Vídeo con todos los 100 problemas resueltos aquí:

<https://youtu.be/T4qkw1cfGAg>

MATEMÁTICAS CON JUAN

<https://www.youtube.com/@matematicaconjuan>

Índice

Índice claro por temas	2
Bloque 1. Ejercicios 1–10: Integrales inmediatas y reglas básicas	3
Bloque 2. Ejercicios 11–20: Potencias, raíces y fracciones sencillas	6
Bloque 3. Ejercicios 21–36: Cambio de variable	9
Bloque 4. Ejercicios 37–48: Integración por partes	14
Bloque 5. Ejercicios 49–56: Integrales trigonométricas sencillas	18
Bloque 6. Ejercicios 57–64: Integrales racionales y fracciones simples	21
Bloque 7. Ejercicios 65–72: Integrales definidas	26
Bloque 8. Ejercicios 73–80: Áreas bajo curvas y entre curvas	29
Bloque 9. Ejercicios 81–86: Volúmenes de revolución	32
Bloque 10. Ejercicios 87–90: Longitud de arco	34
Bloque 11. Ejercicios 91–96: Aplicaciones del cálculo integral	36
Bloque 12. Ejercicios 97–100: Integrales impropias	40
Cierre	44

Índice claro por temas

Bloque	Ejercicios	Tema
1	1–10	Integrales inmediatas y reglas básicas.
2	11–20	Potencias, raíces y fracciones sencillas.
3	21–36	Cambio de variable, con patrones muy reconocibles.
4	37–48	Integración por partes, sin cálculos excesivamente largos.
5	49–56	Integrales trigonométricas sencillas.
6	57–64	Integrales racionales y fracciones simples ligeras.
7	65–72	Integrales definidas.
8	73–80	Áreas bajo curvas y entre curvas.
9	81–86	Volúmenes de revolución.
10	87–90	Longitud de arco, con funciones elegidas para no complicar.
11	91–96	Aplicaciones: trabajo, masa, centro de masa, valor medio y carga.
12	97–100	Integrales impropias como cierre elegante.

Bloque 1 Ejercicios 1–10: Integrales inmediatas y reglas básicas**Ejercicio 1. Integral de una constante****Enunciado.**

Calcula

$$\int 5 \, dx.$$

Solución.La primitiva de una constante se obtiene multiplicando por x :

$$\int 5 \, dx = 5x + C.$$

Ejercicio 2. Regla de la potencia**Enunciado.**

Calcula

$$\int x^4 \, dx.$$

Solución.Usamos $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, con $n \neq -1$. Por tanto,

$$\int x^4 \, dx = \frac{x^5}{5} + C.$$

Ejercicio 3. Polinomio sencillo**Enunciado.**

Calcula

$$\int (3x^2 - 4x + 1) \, dx.$$

Solución.

Integramos término a término:

$$\int (3x^2 - 4x + 1) \, dx = x^3 - 2x^2 + x + C.$$

Ejercicio 4. Integral de uno entre equis**Enunciado.**

Calcula

$$\int \frac{1}{x} \, dx.$$

Solución.

Esta primitiva es especial:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C.$$

Ejercicio 5. Exponencial natural**Enunciado.**

Calcula

$$\int e^x dx.$$

Solución.

La función e^x coincide con su derivada. Por tanto,

$$\int e^x dx = e^x + C.$$

Ejercicio 6. Exponencial de base dos**Enunciado.**

Calcula

$$\int 2^x dx.$$

Solución.

Para $a > 0$, $a \neq 1$, se cumple $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$. Luego

$$\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C.$$

Ejercicio 7. Integral de seno**Enunciado.**

Calcula

$$\int \sin x dx.$$

Solución.

Como $\frac{d}{dx}(-\cos x) = \sin x$, resulta

$$\int \sin x dx = -\cos x + C.$$

Ejercicio 8. Integral de coseno**Enunciado.**

Calcula

$$\int \cos x \, dx.$$

Solución.

Como $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$, resulta

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C.$$

Ejercicio 9. Dos primitivas conocidas

Enunciado.

Calcula

$$\int \left(\sec^2 x + \frac{1}{1+x^2} \right) dx.$$

Solución.

Usamos $\int \sec^2 x \, dx = \tan x$ y $\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan x$. Así,

$$\int \left(\sec^2 x + \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \tan x + \arctan x + C.$$

Ejercicio 10. Combinación lineal

Enunciado.

Calcula

$$\int (4e^x - 3 \sin x) \, dx.$$

Solución.

Integramos por separado:

$$\int (4e^x - 3 \sin x) \, dx = 4e^x + 3 \cos x + C.$$

Bloque 2 Ejercicios 11–20: Potencias, raíces y fracciones sencillas**Ejercicio 11. Raíz cuadrada****Enunciado.**

Calcula

$$\int \sqrt{x} \, dx.$$

Solución.Escribimos $\sqrt{x} = x^{1/2}$. Entonces

$$\int \sqrt{x} \, dx = \int x^{1/2} \, dx = \frac{2}{3} x^{3/2} + C.$$

Ejercicio 12. Inversa de una raíz**Enunciado.**

Calcula

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx.$$

Solución.Como $\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}$, tenemos

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx = \int x^{-1/2} \, dx = 2\sqrt{x} + C.$$

Ejercicio 13. Dividir antes de integrar**Enunciado.**

Calcula

$$\int \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2} \, dx.$$

Solución.

Dividimos cada término:

$$\frac{x^3 - 2x + 1}{x^2} = x - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}.$$

Por tanto,

$$\int \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2} \, dx = \frac{x^2}{2} - 2 \ln |x| - \frac{1}{x} + C.$$

Ejercicio 14. Potencias fraccionarias**Enunciado.**

Calcula

$$\int \left(\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) dx.$$

Solución.

Reescribimos $\sqrt[3]{x^2} = x^{2/3}$ y $1/x^3 = x^{-3}$. Así,

$$\int \left(\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) dx = \frac{3}{5}x^{5/3} - \frac{1}{2x^2} + C.$$

Ejercicio 15. Fracción algebraica sencilla

Enunciado.

Calcula

$$\int \frac{2x^2 + 3x - 5}{x} dx.$$

Solución.

Dividimos entre x :

$$\frac{2x^2 + 3x - 5}{x} = 2x + 3 - \frac{5}{x}.$$

Luego

$$\int \frac{2x^2 + 3x - 5}{x} dx = x^2 + 3x - 5 \ln |x| + C.$$

Ejercicio 16. Desarrollar un cuadrado

Enunciado.

Calcula

$$\int (x + 1)^2 dx.$$

Solución.

Desarrollamos $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$. Por tanto,

$$\int (x + 1)^2 dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + x + C.$$

Ejercicio 17. Raíz dentro de un cuadrado

Enunciado.

Calcula

$$\int (\sqrt{x} + 1)^2 dx.$$

Solución.

Desarrollamos: $(\sqrt{x} + 1)^2 = x + 2\sqrt{x} + 1$. Entonces

$$\int (\sqrt{x} + 1)^2 dx = \frac{x^2}{2} + \frac{4}{3}x^{3/2} + x + C.$$

Ejercicio 18. Dos raíces sencillas

Enunciado.

Calcula

$$\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx.$$

Solución.

Con potencias: $\sqrt{x} - 1/\sqrt{x} = x^{1/2} - x^{-1/2}$. Así,

$$\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx = \frac{2}{3}x^{3/2} - 2\sqrt{x} + C.$$

Ejercicio 19. Separar una fracción

Enunciado.

Calcula

$$\int \frac{(x+1)^2}{x} dx.$$

Solución.

Como $\frac{(x+1)^2}{x} = x + 2 + \frac{1}{x}$, resulta

$$\int \frac{(x+1)^2}{x} dx = \frac{x^2}{2} + 2x + \ln|x| + C.$$

Ejercicio 20. Potencias mezcladas

Enunciado.

Calcula

$$\int \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x}} dx.$$

Solución.

Dividimos entre $\sqrt{x}$:

$$\frac{x^2 + 1}{\sqrt{x}} = x^{3/2} + x^{-1/2}.$$

Por tanto,

$$\int \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x}} dx = \frac{2}{5}x^{5/2} + 2\sqrt{x} + C.$$

Bloque 3 Ejercicios 21–36: Cambio de variable**Idea clave**

Buscamos una función compuesta y, cerca de ella, su derivada. Ésa es la pista más habitual para hacer un cambio de variable.

Ejercicio 21. Cambio directo**Enunciado.**

Calcula

$$\int 2x(x^2 + 1)^4 dx.$$

Solución.

Tomamos $u = x^2 + 1$, $du = 2x dx$. Entonces

$$\int 2x(x^2 + 1)^4 dx = \int u^4 du = \frac{u^5}{5} + C = \frac{(x^2 + 1)^5}{5} + C.$$

Ejercicio 22. Logaritmo por cambio**Enunciado.**

Calcula

$$\int \frac{2x}{x^2 + 5} dx.$$

Solución.

Con $u = x^2 + 5$, $du = 2x dx$. Así,

$$\int \frac{2x}{x^2 + 5} dx = \ln(x^2 + 5) + C.$$

Ejercicio 23. Exponencial compuesta**Enunciado.**

Calcula

$$\int e^{3x} dx.$$

Solución.

Tomamos $u = 3x$, $du = 3 dx$. Luego

$$\int e^{3x} dx = \frac{1}{3}e^{3x} + C.$$

Ejercicio 24. Coseno compuesto**Enunciado.**

Calcula

$$\int \cos(4x) \, dx.$$

Solución.Con $u = 4x$, queda $du = 4 \, dx$. Por tanto,

$$\int \cos(4x) \, dx = \frac{1}{4} \sin(4x) + C.$$

Ejercicio 25. Logaritmo inmediato**Enunciado.**

Calcula

$$\int \frac{3}{3x+1} \, dx.$$

Solución.Tomamos $u = 3x + 1$, $du = 3 \, dx$. Entonces

$$\int \frac{3}{3x+1} \, dx = \ln|3x+1| + C.$$

Ejercicio 26. Exponencial con equis al cuadrado**Enunciado.**

Calcula

$$\int x e^{x^2} \, dx.$$

Solución.Con $u = x^2$, $du = 2x \, dx$. Así,

$$\int x e^{x^2} \, dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + C.$$

Ejercicio 27. Seno compuesto**Enunciado.**

Calcula

$$\int \sin(2x+1) \, dx.$$

Solución.Tomamos $u = 2x + 1$, $du = 2 \, dx$. Por tanto,

$$\int \sin(2x+1) \, dx = -\frac{1}{2} \cos(2x+1) + C.$$

Ejercicio 28. Raíz lineal**Enunciado.**

Calcula

$$\int \frac{1}{\sqrt{5x+2}} dx.$$

Solución.Con $u = 5x + 2$, $du = 5 dx$. Entonces

$$\int \frac{1}{\sqrt{5x+2}} dx = \frac{1}{5} \int u^{-1/2} du = \frac{2}{5} \sqrt{5x+2} + C.$$

Ejercicio 29. Coseno con equis al cuadrado**Enunciado.**

Calcula

$$\int 4x \cos(x^2) dx.$$

Solución.Tomamos $u = x^2$, $du = 2x dx$. Como $4x dx = 2 du$,

$$\int 4x \cos(x^2) dx = 2 \sin(x^2) + C.$$

Ejercicio 30. Potencia de una expresión**Enunciado.**

Calcula

$$\int (2x+1)(x^2+x+1)^3 dx.$$

Solución.Con $u = x^2 + x + 1$, $du = (2x+1) dx$. Luego

$$\int (2x+1)(x^2+x+1)^3 dx = \frac{(x^2+x+1)^4}{4} + C.$$

Ejercicio 31. Logaritmo con constante**Enunciado.**

Calcula

$$\int \frac{6x}{3x^2+4} dx.$$

Solución.

Tomamos $u = 3x^2 + 4$, $du = 6x \, dx$. Entonces

$$\int \frac{6x}{3x^2 + 4} \, dx = \ln(3x^2 + 4) + C.$$

Ejercicio 32. Exponencial decreciente

Enunciado.

Calcula

$$\int e^{1-x} \, dx.$$

Solución.

Con $u = 1 - x$, $du = -dx$. Así,

$$\int e^{1-x} \, dx = -e^{1-x} + C.$$

Ejercicio 33. Seno y coseno

Enunciado.

Calcula

$$\int \sin x \cos^2 x \, dx.$$

Solución.

Tomamos $u = \cos x$, $du = -\sin x \, dx$. Por tanto,

$$\int \sin x \cos^2 x \, dx = -\int u^2 \, du = -\frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

Ejercicio 34. Potencia en el denominador

Enunciado.

Calcula

$$\int \frac{x}{(x^2 + 1)^2} \, dx.$$

Solución.

Con $u = x^2 + 1$, $du = 2x \, dx$. Entonces

$$\int \frac{x}{(x^2 + 1)^2} \, dx = \frac{1}{2} \int u^{-2} \, du = -\frac{1}{2(x^2 + 1)} + C.$$

Ejercicio 35. Cuadrado lineal en el denominador

Enunciado.

Calcula

$$\int \frac{5}{(5x-2)^2} dx.$$

Solución.

Tomamos $u = 5x - 2$, $du = 5 dx$. Así,

$$\int \frac{5}{(5x-2)^2} dx = \int u^{-2} du = -\frac{1}{5x-2} + C.$$

Ejercicio 36. Logaritmo del logaritmo

Enunciado.

Calcula

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx.$$

Solución.

Con $u = \ln x$, $du = \frac{1}{x} dx$. Entonces

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx = \ln |\ln x| + C.$$

Bloque 4 Ejercicios 37–48: Integración por partes

Fórmula de integración por partes

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du.$$

Elegimos como u la parte que se simplifica al derivar.

Ejercicio 37. Por partes con xe elevado a x **Enunciado.**

Calcula

$$\int x e^x \, dx.$$

Solución.

Tomamos $u = x$, $dv = e^x \, dx$. Entonces $du = dx$, $v = e^x$. Por partes,

$$\int x e^x \, dx = x e^x - \int e^x \, dx = e^x(x - 1) + C.$$

Ejercicio 38. Por partes con x coseno**Enunciado.**

Calcula

$$\int x \cos x \, dx.$$

Solución.

Tomamos $u = x$, $dv = \cos x \, dx$. Entonces $v = \sin x$. Así,

$$\int x \cos x \, dx = x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x + C.$$

Ejercicio 39. Por partes con x seno**Enunciado.**

Calcula

$$\int x \sin x \, dx.$$

Solución.

Tomamos $u = x$, $dv = \sin x \, dx$. Entonces $v = -\cos x$. Por tanto,

$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

Ejercicio 40. Integral de logaritmo**Enunciado.**

Calcula

$$\int \ln x \, dx.$$

Solución.Escribimos $\ln x = 1 \cdot \ln x$. Tomamos $u = \ln x$, $dv = dx$. Así,

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int 1 \, dx = x \ln x - x + C.$$

Ejercicio 41. Producto x logaritmo**Enunciado.**

Calcula

$$\int x \ln x \, dx.$$

Solución.Tomamos $u = \ln x$, $dv = x \, dx$. Entonces $v = x^2/2$. Luego

$$\int x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

Ejercicio 42. Por partes dos veces**Enunciado.**

Calcula

$$\int x^2 e^x \, dx.$$

Solución.Tomamos $u = x^2$, $dv = e^x \, dx$. Entonces

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x \, dx.$$

Como $\int x e^x \, dx = e^x(x - 1)$, queda

$$\int x^2 e^x \, dx = e^x(x^2 - 2x + 2) + C.$$

Ejercicio 43. Otro producto exponencial**Enunciado.**

Calcula

$$\int (x + 1)e^x \, dx.$$

Solución.

Separamos:

$$\int (x+1)e^x dx = \int xe^x dx + \int e^x dx.$$

Como $\int xe^x dx = e^x(x-1)$, resulta

$$\int (x+1)e^x dx = xe^x + C.$$

Ejercicio 44. Producto trigonométrico lineal**Enunciado.**

Calcula

$$\int (2x-1) \sin x dx.$$

Solución.

Separamos:

$$2 \int x \sin x dx - \int \sin x dx.$$

Usando $\int x \sin x dx = -x \cos x + \sin x$, obtenemos

$$\int (2x-1) \sin x dx = -2x \cos x + 2 \sin x + \cos x + C.$$

Ejercicio 45. Integral de arcotangente**Enunciado.**

Calcula

$$\int \arctan x dx.$$

Solución.Tomamos $u = \arctan x$, $dv = dx$. Entonces

$$\int \arctan x dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$$

Ejercicio 46. Logaritmo con potencia**Enunciado.**

Calcula

$$\int x^2 \ln x dx.$$

Solución.

Tomamos $u = \ln x$, $dv = x^2 dx$. Entonces $v = x^3/3$. Por partes,

$$\int x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C.$$

Ejercicio 47. Producto con coseno y potencia

Enunciado.

Calcula

$$\int x^2 \cos x dx.$$

Solución.

Tomamos $u = x^2$, $dv = \cos x dx$. Entonces

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x dx.$$

Usando $\int x \sin x dx = -x \cos x + \sin x$, queda

$$x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C.$$

Ejercicio 48. Partes con dificultad controlada

Enunciado.

Calcula

$$\int (x^2 + 1)e^x dx.$$

Solución.

Separamos:

$$\int (x^2 + 1)e^x dx = \int x^2 e^x dx + \int e^x dx.$$

Como $\int x^2 e^x dx = e^x(x^2 - 2x + 2)$, resulta

$$\int (x^2 + 1)e^x dx = e^x(x^2 - 2x + 3) + C.$$

Bloque 5 Ejercicios 49–56: Integrales trigonométricas sencillas**Ejercicio 49. Integral de seno al cuadrado****Enunciado.**

Calcula

$$\int \sin^2 x \, dx.$$

Solución.Usamos $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$. Entonces

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

Ejercicio 50. Integral de coseno al cuadrado**Enunciado.**

Calcula

$$\int \cos^2 x \, dx.$$

Solución.Usamos $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$. Entonces

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

Ejercicio 51. Producto seno coseno**Enunciado.**

Calcula

$$\int \sin x \cos x \, dx.$$

Solución.Tomamos $u = \sin x$, $du = \cos x \, dx$. Así,

$$\int \sin x \cos x \, dx = \frac{\sin^2 x}{2} + C.$$

Ejercicio 52. Integral de tangente**Enunciado.**

Calcula

$$\int \tan x \, dx.$$

Solución.

Como $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, tomamos $u = \cos x$. Entonces

$$\int \tan x \, dx = -\ln |\cos x| + C.$$

Ejercicio 53. Integral de cotangente**Enunciado.**

Calcula

$$\int \cot x \, dx.$$

Solución.

Como $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$, tomamos $u = \sin x$. Entonces

$$\int \cot x \, dx = \ln |\sin x| + C.$$

Ejercicio 54. Secante al cuadrado compuesta**Enunciado.**

Calcula

$$\int \sec^2(3x) \, dx.$$

Solución.

Con $u = 3x$, $du = 3 \, dx$. Por tanto,

$$\int \sec^2(3x) \, dx = \frac{1}{3} \tan(3x) + C.$$

Ejercicio 55. Seno al cubo**Enunciado.**

Calcula

$$\int \sin^3 x \, dx.$$

Solución.

Escribimos $\sin^3 x = \sin x(1 - \cos^2 x)$. Con $u = \cos x$, queda

$$\int \sin^3 x \, dx = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

Ejercicio 56. Coseno al cubo**Enunciado.**

Calcula

$$\int \cos^3 x \, dx.$$

Solución.

Escribimos $\cos^3 x = \cos x(1 - \sin^2 x)$. Con $u = \sin x$, queda

$$\int \cos^3 x \, dx = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

Bloque 6 Ejercicios 57–64: Integrales racionales y fracciones simples**Ejercicio 57. Numerador igual a la derivada****Enunciado.**

Calcula

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x+5} dx.$$

Solución.

Observamos que el denominador es

$$x^2 + 3x + 5.$$

Su derivada es

$$\frac{d}{dx} (x^2 + 3x + 5) = 2x + 3.$$

Precisamente el numerador es la derivada del denominador. Por tanto, estamos ante una integral logarítmica inmediata:

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x+5} dx = \ln(x^2+3x+5) + C.$$

Por tanto:

$$\boxed{\int \frac{2x+3}{x^2+3x+5} dx = \ln(x^2+3x+5) + C}$$

Ejercicio 58. Fracciones simples básicas**Enunciado.**

Calcula

$$\int \frac{1}{x(x+1)} dx.$$

Solución.

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}.$$

Multiplicamos por $x(x+1)$:

$$1 = A(x+1) + Bx.$$

Tomando $x = 0$:

$$1 = A.$$

Tomando $x = -1$:

$$1 = -B,$$

por tanto:

$$B = -1.$$

Así que:

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.$$

Por tanto:

$$\int \frac{1}{x(x+1)} dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx.$$

Finalmente:

$$\int \frac{1}{x(x+1)} dx = \ln |x| - \ln |x+1| + C$$

También puede escribirse como:

$$\ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + C$$

Ejercicio 59. Fracciones simples con diferencia de cuadrados

Enunciado.

Calcula

$$\int \frac{1}{4x^2 - 9} dx.$$

Solución.

Primero factorizamos el denominador. Observamos que:

$$4x^2 - 9 = (2x)^2 - 3^2.$$

Por tanto:

$$4x^2 - 9 = (2x - 3)(2x + 3).$$

Entonces:

$$\int \frac{1}{4x^2 - 9} dx = \int \frac{1}{(2x - 3)(2x + 3)} dx.$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{(2x - 3)(2x + 3)} = \frac{A}{2x - 3} + \frac{B}{2x + 3}.$$

Multiplicamos por $(2x - 3)(2x + 3)$:

$$1 = A(2x + 3) + B(2x - 3).$$

Tomamos $x = \frac{3}{2}$:

$$1 = A(6),$$

por tanto:

$$A = \frac{1}{6}.$$

Tomamos $x = -\frac{3}{2}$:

$$1 = B(-6),$$

por tanto:

$$B = -\frac{1}{6}.$$

Así que:

$$\frac{1}{4x^2 - 9} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2x - 3} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2x + 3}.$$

Integramos:

$$\int \frac{1}{4x^2 - 9} dx = \frac{1}{6} \int \frac{1}{2x - 3} dx - \frac{1}{6} \int \frac{1}{2x + 3} dx.$$

Como la derivada de $2x - 3$ y de $2x + 3$ es 2, aparece un factor $\frac{1}{2}$:

$$\int \frac{1}{4x^2 - 9} dx = \frac{1}{12} \ln |2x - 3| - \frac{1}{12} \ln |2x + 3| + C.$$

Finalmente:

$$\int \frac{1}{4x^2 - 9} dx = \frac{1}{12} \ln \left| \frac{2x - 3}{2x + 3} \right| + C$$

Ejercicio 60. Fracciones simples básicas

Enunciado.

Calcula

$$\int \frac{x + 2}{x^2 - 1} dx.$$

Solución.

Primero factorizamos el denominador:

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1).$$

Por tanto:

$$\int \frac{x + 2}{x^2 - 1} dx = \int \frac{x + 2}{(x - 1)(x + 1)} dx.$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{x + 2}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1}.$$

Multiplicamos por $(x - 1)(x + 1)$:

$$x + 2 = A(x + 1) + B(x - 1).$$

Tomando $x = 1$:

$$3 = 2A,$$

por tanto:

$$A = \frac{3}{2}.$$

Tomando $x = -1$:

$$1 = -2B,$$

por tanto:

$$B = -\frac{1}{2}.$$

Así que:

$$\frac{x + 2}{x^2 - 1} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x + 1}.$$

Integramos:

$$\int \frac{x+2}{x^2-1} dx = \int \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1} \right) dx.$$

Finalmente:

$$\int \frac{x+2}{x^2-1} dx = \frac{3}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + C$$

Ejercicio 61. Integral con arcotangente

Enunciado.

Calcula

$$\int \frac{1}{x^2+9} dx.$$

Solución.

Recordamos la fórmula:

$$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C.$$

En este caso:

$$x^2+9 = x^2+3^2.$$

Por tanto, $a = 3$. Aplicamos la fórmula:

$$\int \frac{1}{x^2+9} dx = \frac{1}{3} \arctan\left(\frac{x}{3}\right) + C.$$

Así que:

$$\int \frac{1}{x^2+9} dx = \frac{1}{3} \arctan\left(\frac{x}{3}\right) + C$$

Ejercicio 62. Logaritmo y arcotangente

Enunciado.

Calcula

$$\int \frac{3x+2}{x^2+2x+5} dx.$$

Solución.

Escribimos $3x+2 = \frac{3}{2}(2x+2) - 1$ y $x^2+2x+5 = (x+1)^2+4$. Entonces

$$\int \frac{3x+2}{x^2+2x+5} dx = \frac{3}{2} \ln(x^2+2x+5) - \frac{1}{2} \arctan \frac{x+1}{2} + C.$$

Ejercicio 63. División de polinomios

Enunciado.

Calcula

$$\int \frac{x^2 + 1}{x + 1} dx.$$

Solución.

Dividimos: $\frac{x^2+1}{x+1} = x - 1 + \frac{2}{x+1}$. Por tanto,

$$\int \frac{x^2 + 1}{x + 1} dx = \frac{x^2}{2} - x + 2 \ln |x + 1| + C.$$

Ejercicio 64. División de polinomios

Enunciado.

Calcula

$$\int \frac{x^2 + 3x + 4}{x + 1} dx.$$

Solución.

En esta integral, el grado del numerador es mayor que el grado del denominador. Por tanto, antes de integrar, dividimos polinomios:

$$\frac{x^2 + 3x + 4}{x + 1}.$$

Dividimos:

$$x^2 + 3x + 4 = (x + 1)(x + 2) + 2.$$

Por tanto:

$$\frac{x^2 + 3x + 4}{x + 1} = x + 2 + \frac{2}{x + 1}.$$

Ahora la integral queda:

$$\int \frac{x^2 + 3x + 4}{x + 1} dx = \int \left(x + 2 + \frac{2}{x + 1} \right) dx.$$

Integramos término a término:

$$\int x dx = \frac{x^2}{2},$$

$$\int 2 dx = 2x,$$

$$\int \frac{2}{x + 1} dx = 2 \ln |x + 1|.$$

Por tanto:

$$\int \frac{x^2 + 3x + 4}{x + 1} dx = \frac{x^2}{2} + 2x + 2 \ln |x + 1| + C$$

Bloque 7 Ejercicios 65–72: Integrales definidas**Ejercicio 65. Integral definida básica****Enunciado.**

Calcula

$$\int_0^2 x^2 \, dx.$$

Solución.Una primitiva es $F(x) = x^3/3$. Entonces

$$\int_0^2 x^2 \, dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{8}{3}.$$

Ejercicio 66. Integral definida de una recta**Enunciado.**

Calcula

$$\int_1^3 (2x + 1) \, dx.$$

Solución.Una primitiva es $F(x) = x^2 + x$. Luego

$$\int_1^3 (2x + 1) \, dx = (9 + 3) - (1 + 1) = 10.$$

Ejercicio 67. Área bajo un seno**Enunciado.**

Calcula

$$\int_0^\pi \sin x \, dx.$$

Solución.Una primitiva es $-\cos x$. Así,

$$\int_0^\pi \sin x \, dx = [-\cos x]_0^\pi = 1 - (-1) = 2.$$

Ejercicio 68. Simetría**Enunciado.**

Calcula

$$\int_{-1}^1 x^2 \, dx.$$

Solución.

Como x^2 es par,

$$\int_{-1}^1 x^2 dx = 2 \int_0^1 x^2 dx = 2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Ejercicio 69. Exponencial definida**Enunciado.**

Calcula

$$\int_0^1 e^x dx.$$

Solución.

Una primitiva es e^x . Por tanto,

$$\int_0^1 e^x dx = e - 1.$$

Ejercicio 70. Logaritmo definido**Enunciado.**

Calcula

$$\int_0^1 \frac{1}{x+1} dx.$$

Solución.

Una primitiva es $\ln|x+1|$. En $[0, 1]$, $x+1 > 0$. Luego

$$\int_0^1 \frac{1}{x+1} dx = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

Ejercicio 71. Coseno definido**Enunciado.**

Calcula

$$\int_0^{\pi/2} \cos x dx.$$

Solución.

Una primitiva es $\sin x$. Entonces

$$\int_0^{\pi/2} \cos x dx = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$$

Ejercicio 72. Raíz definida**Enunciado.**

Calcula

$$\int_1^4 \sqrt{x} \, dx.$$

Solución.

Una primitiva es $\frac{2}{3}x^{3/2}$. Por tanto,

$$\int_1^4 \sqrt{x} \, dx = \frac{2}{3}(4^{3/2} - 1) = \frac{14}{3}.$$

Bloque 8 Ejercicios 73–80: Áreas bajo curvas y entre curvas

Idea para áreas

$$A = \int_a^b (\text{función superior} - \text{función inferior}) \, dx.$$

Ejercicio 73. Área bajo una recta**Enunciado.**

Halla el área bajo $y = x$ entre $x = 0$ y $x = 4$.

Solución.

Como $x \geq 0$ en $[0, 4]$,

$$A = \int_0^4 x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4 = 8.$$

Ejercicio 74. Área bajo una parábola**Enunciado.**

Halla el área entre $y = 4 - x^2$ y el eje x en $[0, 2]$.

Solución.

En $[0, 2]$, $4 - x^2 \geq 0$. Luego

$$A = \int_0^2 (4 - x^2) \, dx = \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{16}{3}.$$

Ejercicio 75. Área entre equis y equis cuadrado**Enunciado.**

Halla el área entre $y = x$ e $y = x^2$ en $[0, 1]$.

Solución.

En $[0, 1]$, $x \geq x^2$. Por tanto,

$$A = \int_0^1 (x - x^2) \, dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Ejercicio 76. Área entre recta y parábola**Enunciado.**

Halla el área entre $y = 2x$ e $y = x^2$.

Solución.

Los cortes cumplen $2x = x^2$, luego $x = 0$ y $x = 2$. En ese intervalo, $2x \geq x^2$. Así,

$$A = \int_0^2 (2x - x^2) dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{4}{3}.$$

Ejercicio 77. Área entre raíz y recta**Enunciado.**

Halla el área entre $y = \sqrt{x}$ e $y = x$ en $[0, 1]$.

Solución.

En $[0, 1]$, $\sqrt{x} \geq x$. Entonces

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x) dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Ejercicio 78. Área entre parábola y recta horizontal**Enunciado.**

Halla el área entre $y = 4$ e $y = x^2$ entre $x = -2$ y $x = 2$.

Solución.

En $[-2, 2]$, $4 \geq x^2$. Por simetría,

$$A = 2 \int_0^2 (4 - x^2) dx = 2 \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{32}{3}.$$

Ejercicio 79. Área con puntos de corte**Enunciado.**

Halla el área entre $y = x + 2$ e $y = x^2$.

Solución.

Los cortes salen de $x + 2 = x^2$, es decir, $(x - 2)(x + 1) = 0$. Luego $x = -1$ y $x = 2$. En ese intervalo, $x + 2 \geq x^2$. Por tanto,

$$A = \int_{-1}^2 (x + 2 - x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^2 = \frac{9}{2}.$$

Ejercicio 80. Área bajo el seno**Enunciado.**

Halla el área entre $y = \sin x$ y el eje x en $[0, \pi]$.

Solución.

En $[0, \pi]$, $\sin x \geq 0$. Así,

$$A = \int_0^{\pi} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\pi} = 2.$$

Bloque 9 Ejercicios 81–86: Volúmenes de revolución**Idea para volúmenes**

Al girar alrededor del eje x , usamos discos:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

Si hay hueco interior, usamos arandelas:

$$V = \pi \int_a^b (R(x)^2 - r(x)^2) dx.$$

Ejercicio 81. Volumen de un cono**Enunciado.**

La región bajo $y = x$, entre $0 \leq x \leq 2$, gira alrededor del eje x . Halla el volumen.

Solución.

Por discos, $V = \pi \int_0^2 [f(x)]^2 dx$. Entonces

$$V = \pi \int_0^2 x^2 dx = \pi \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{8\pi}{3}.$$

Ejercicio 82. Volumen con raíz**Enunciado.**

La región bajo $y = \sqrt{x}$, entre $0 \leq x \leq 4$, gira alrededor del eje x . Halla el volumen.

Solución.

Por discos,

$$V = \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^4 x dx = 8\pi.$$

Ejercicio 83. Volumen de un cilindro**Enunciado.**

La región bajo $y = 2$, entre $0 \leq x \leq 3$, gira alrededor del eje x . Halla el volumen.

Solución.

Por discos,

$$V = \pi \int_0^3 2^2 dx = 4\pi \cdot 3 = 12\pi.$$

Ejercicio 84. Volumen con parábola sencilla**Enunciado.**

La región bajo $y = x^2$, entre $0 \leq x \leq 1$, gira alrededor del eje x . Halla el volumen.

Solución.

Por discos,

$$V = \pi \int_0^1 (x^2)^2 dx = \pi \int_0^1 x^4 dx = \frac{\pi}{5}.$$

Ejercicio 85. Arandelas sencillas**Enunciado.**

La región entre $y = 2$ e $y = x$, para $0 \leq x \leq 2$, gira alrededor del eje x . Halla el volumen.

Solución.

Usamos arandelas:

$$V = \pi \int_0^2 (2^2 - x^2) dx = \pi \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{16\pi}{3}.$$

Ejercicio 86. Volumen con función desplazada**Enunciado.**

La región bajo $y = \sqrt{1+x}$, entre $0 \leq x \leq 3$, gira alrededor del eje x . Halla el volumen.

Solución.

Por discos,

$$V = \pi \int_0^3 (\sqrt{1+x})^2 dx = \pi \int_0^3 (1+x) dx = \frac{15\pi}{2}.$$

Bloque 10 Ejercicios 87–90: Longitud de arco

Idea para longitud de arco

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

En este bloque las funciones están elegidas para que las cuentas sean razonables.

Ejercicio 87. Longitud de un segmento oblicuo**Enunciado.**

Halla la longitud de arco de $y = 2x$ entre $x = 0$ y $x = 3$.

Solución.

La fórmula es $L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$. Como $f'(x) = 2$,

$$L = \int_0^3 \sqrt{5} dx = 3\sqrt{5}.$$

Ejercicio 88. Longitud de arco preparada**Enunciado.**

Halla la longitud de arco de $y = \frac{2}{3}x^{3/2}$ entre $x = 0$ y $x = 3$.

Solución.

Derivamos: $y' = \sqrt{x}$. Entonces

$$L = \int_0^3 \sqrt{1+x} dx = \left[\frac{2}{3}(1+x)^{3/2} \right]_0^3 = \frac{14}{3}.$$

Ejercicio 89. Otra longitud amable**Enunciado.**

Halla la longitud de arco de $y = \frac{2}{3}(x-1)^{3/2}$ entre $x = 1$ y $x = 5$.

Solución.

Derivamos: $y' = \sqrt{x-1}$. Entonces

$$L = \int_1^5 \sqrt{1+x-1} dx = \int_1^5 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3}(5\sqrt{5} - 1).$$

Ejercicio 90. Longitud con logaritmo trigonométrico**Enunciado.**

Halla la longitud de arco de $y = \ln(\cos x)$ entre $x = 0$ y $x = \pi/4$.

Solución.

Derivamos: $y' = -\tan x$. Entonces $\sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{1 + \tan^2 x} = \sec x$. Así,

$$L = \int_0^{\pi/4} \sec x \, dx = [\ln |\sec x + \tan x|]_0^{\pi/4} = \ln(1 + \sqrt{2}).$$

Bloque 11 Ejercicios 91–96: Aplicaciones del cálculo integral**Idea para aplicaciones**

Una integral definida mide acumulaciones: trabajo, masa, carga total, valor medio o posición de equilibrio.

Ejercicio 91. Trabajo con fuerza variable**Enunciado.**

Una fuerza variable es $F(x) = 2x + 1$ N. Halla el trabajo desde $x = 0$ hasta $x = 4$.

Solución.

El trabajo es $W = \int_a^b F(x) dx$. Por tanto,

$$W = \int_0^4 (2x + 1) dx = [x^2 + x]_0^4 = 20 \text{ J.}$$

Ejercicio 92. Trabajo al estirar un muelle**Enunciado.**

Un muelle cumple $F(x) = 50x$, con x en metros. Halla el trabajo al estirarlo de 0 a 0,2 m.

Solución.

El trabajo es

$$W = \int_0^{0,2} 50x dx = 50 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{0,2} = 25(0,2)^2 = 1 \text{ J.}$$

Ejercicio 93. Masa de una varilla**Enunciado.**

Una varilla ocupa $[0, 2]$ y tiene densidad lineal

$$\rho(x) = 1 + x^2$$

kg/m. Halla su masa.

Solución.

La masa total de la varilla se obtiene integrando la densidad lineal:

$$M = \int_a^b \rho(x) dx.$$

En este caso:

$$M = \int_0^2 (1 + x^2) dx.$$

Calculamos:

$$M = \left[x + \frac{x^3}{3} \right]_0^2.$$

Sustituimos los extremos:

$$M = \left(2 + \frac{2^3}{3}\right) - \left(0 + \frac{0^3}{3}\right).$$

Por tanto:

$$M = 2 + \frac{8}{3} = \frac{6}{3} + \frac{8}{3} = \frac{14}{3}.$$

Así que la masa de la varilla es

$$M = \frac{14}{3} \text{ kg}.$$

Ejercicio 94. Centro de masa de una varilla

Enunciado.

Una varilla ocupa $[0, 1]$ y tiene densidad

$$\rho(x) = e^x.$$

Halla la coordenada de su centro de masa.

Solución.

La coordenada del centro de masa de una varilla viene dada por

$$\bar{x} = \frac{\int_0^1 x\rho(x) \, dx}{\int_0^1 \rho(x) \, dx}.$$

Primero calculamos la masa total:

$$M = \int_0^1 e^x \, dx.$$

Entonces:

$$M = [e^x]_0^1 = e - 1.$$

Ahora calculamos el momento respecto del origen:

$$\int_0^1 xe^x \, dx.$$

Esta integral se calcula por partes. Tomamos:

$$u = x, \quad dv = e^x \, dx.$$

Entonces:

$$du = dx, \quad v = e^x.$$

Por tanto:

$$\int xe^x \, dx = xe^x - \int e^x \, dx = xe^x - e^x.$$

Aplicamos los límites:

$$\int_0^1 xe^x \, dx = [xe^x - e^x]_0^1.$$

Sustituimos:

$$\int_0^1 xe^x \, dx = (1 \cdot e - e) - (0 \cdot e^0 - e^0).$$

Es decir:

$$\int_0^1 x e^x dx = 0 - (-1) = 1.$$

Finalmente:

$$\bar{x} = \frac{1}{e-1}.$$

Así que la coordenada del centro de masa es

$$\boxed{\bar{x} = \frac{1}{e-1}}.$$

Ejercicio 95. Valor medio de una función

Enunciado.

Halla el valor medio de $f(x) = x^2$ en $[0, 3]$.

Solución.

El valor medio es $f_{\text{med}} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$. Entonces

$$f_{\text{med}} = \frac{1}{3} \int_0^3 x^2 dx = \frac{1}{3} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^3 = 3.$$

Ejercicio 96. Carga total con densidad variable

Enunciado.

Una varilla ocupa $[0, \pi]$ y tiene densidad de carga

$$\lambda(x) = 2 + \cos x$$

C/m. Halla la carga total.

Solución.

La carga total se obtiene integrando la densidad de carga:

$$Q = \int_a^b \lambda(x) dx.$$

En este caso:

$$Q = \int_0^\pi (2 + \cos x) dx.$$

Calculamos:

$$Q = [2x + \operatorname{sen} x]_0^\pi.$$

Sustituimos los extremos:

$$Q = (2\pi + \operatorname{sen} \pi) - (0 + \operatorname{sen} 0).$$

Como

$$\operatorname{sen} \pi = 0 \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} 0 = 0,$$

queda:

$$Q = 2\pi.$$

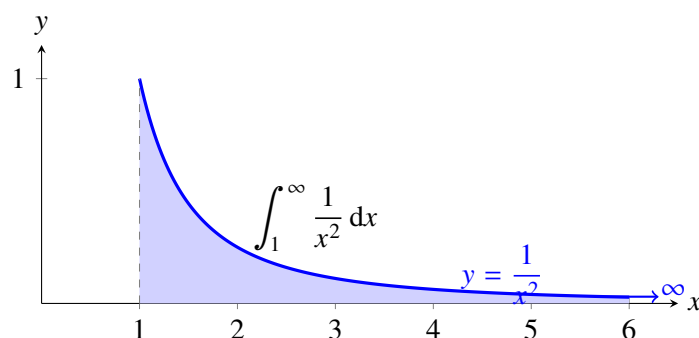
Por tanto, la carga total de la varilla es

$$Q = 2\pi C.$$

Bloque 12 Ejercicios 97–100: Integrales impropias**Ejercicio 97. Integral impropia convergente****Enunciado.**

Calcula, si converge,

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx.$$

**Solución.**

Escribimos la integral impropia como un límite:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^{-2} dx.$$

Como una primitiva de x^{-2} es

$$-\frac{1}{x},$$

tenemos

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^b.$$

Evaluamos:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{b} + 1 \right) = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{b} \right).$$

Como

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{b} = 0,$$

obtenemos

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1.$$

Por tanto, la integral **converge** y su valor es

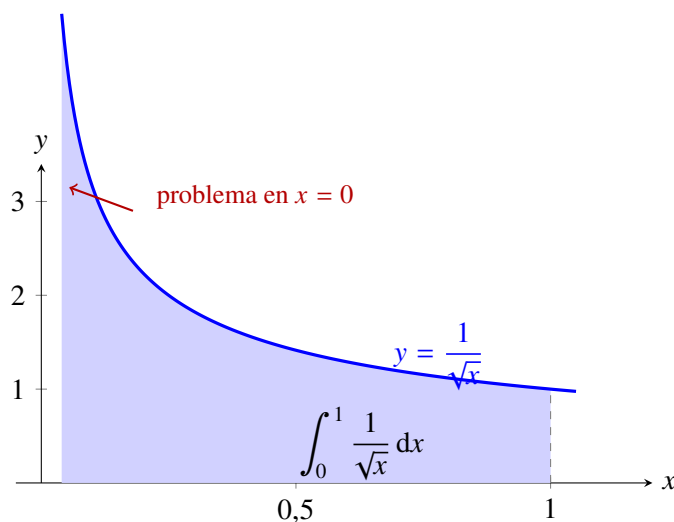
$$\boxed{1}.$$

Aunque la región se prolonga indefinidamente hacia la derecha, su área total es finita.

Ejercicio 98. Impropia en el extremo**Enunciado.**

Calcula, si converge,

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx.$$

**Solución.**

La integral es impropia porque la función

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

no está acotada cuando $x \rightarrow 0^+$. Por eso escribimos

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 x^{-1/2} dx.$$

Una primitiva de $x^{-1/2}$ es

$$2\sqrt{x}.$$

Por tanto,

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} [2\sqrt{x}]_a^1.$$

Evalúamos:

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} (2\sqrt{1} - 2\sqrt{a}) = \lim_{a \rightarrow 0^+} (2 - 2\sqrt{a}).$$

Como

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \sqrt{a} = 0,$$

obtenemos

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2.$$

Por tanto, la integral **converge** y su valor es

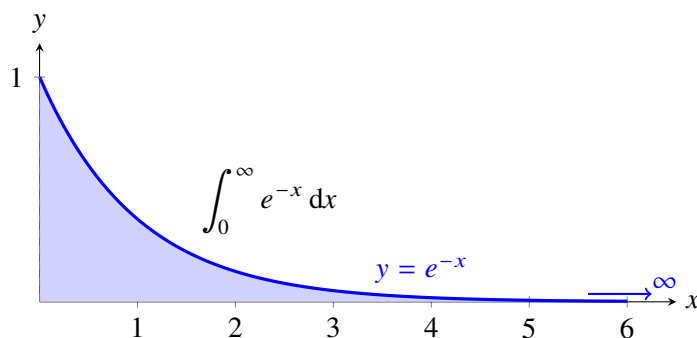
$$\boxed{2}.$$

Aunque la función crece sin límite al acercarnos a $x = 0$, el área total encerrada bajo la curva entre 0 y 1 es finita.

Ejercicio 99. Exponencial impropia**Enunciado.**

Calcula, si converge,

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx.$$

**Solución.**

La integral es impropia porque el intervalo de integración es infinito. Por eso escribimos

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-x} dx.$$

Una primitiva de e^{-x} es

$$-e^{-x}.$$

Por tanto,

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} [-e^{-x}]_0^b.$$

Evaluamos:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} (-e^{-b} - (-e^0)) = \lim_{b \rightarrow \infty} (1 - e^{-b}).$$

Como

$$\lim_{b \rightarrow \infty} e^{-b} = 0,$$

obtenemos

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1.$$

Por tanto, la integral **converge** y su valor es

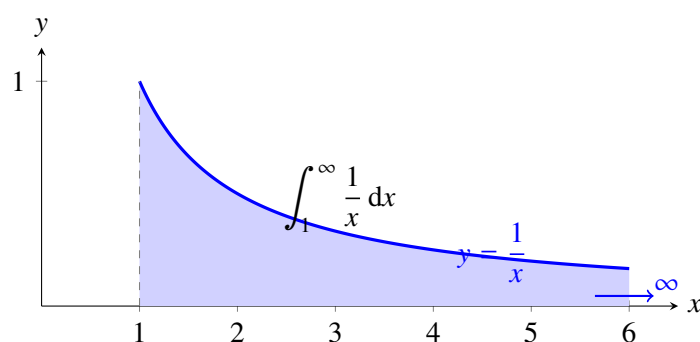
$$\boxed{1}.$$

Aunque la región se prolonga indefinidamente hacia la derecha, el área total bajo la curva es finita.

Ejercicio 100. Integral impropia divergente**Enunciado.**

Estudia si converge

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx.$$

**Solución.**

La integral es impropia porque el intervalo de integración es infinito. Por eso escribimos

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx.$$

Una primitiva de $\frac{1}{x}$ es

$$\ln x.$$

Por tanto,

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} [\ln x]_1^b.$$

Evaluamos:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} (\ln b - \ln 1).$$

Como

$$\ln 1 = 0,$$

queda

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \ln b.$$

Pero

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \ln b = \infty.$$

Por tanto, la integral **diverge**:

$$\boxed{\text{diverge}}.$$

Aunque la función $\frac{1}{x}$ se acerca a 0, lo hace tan lentamente que el área acumulada desde 1 hasta infinito no es finita.

Cierre

Mensaje final para el estudiante

El cálculo integral se aprende reconociendo patrones. Primero aparecen primitivas sencillas; después, métodos como cambio de variable e integración por partes; finalmente, la integral se convierte en una herramienta para medir áreas, volúmenes, longitudes, trabajo, masa y otras acumulaciones.

Versión en vídeo

Vídeo con todos los 100 problemas resueltos aquí:

<https://youtu.be/T4qkw1cfGAg>

MATEMÁTICAS CON JUAN

<https://www.youtube.com/@matematicaconjuan>