

MATEMÁTICAS CON JUAN

<https://www.youtube.com/@matematicaconjuan>

Trigonometría desde cero

Clase con lo más importante que tienes que saber

10 ejercicios sencillos, progresivos y resueltos paso a paso

Versión vídeo de estos ejercicios aquí:

<https://youtu.be/tWD8k5XmHno>

Material preparado para una clase introductoria de trigonometría.

El objetivo es aprender las ideas esenciales sin empezar con ejercicios demasiado largos: conversión entre grados y radianes, razones trigonométricas, leyes de senos y cosenos, aplicaciones geométricas, identidades y una ecuación trigonométrica final.

Ejercicio 1. Pasar de grados a radianes

Pasa los siguientes ángulos de grados a radianes:

a) 45° b) 60°

Solución

Para pasar de grados a radianes usamos la relación fundamental:

$$180^\circ = \pi \text{ radianes}$$

Por tanto, para convertir un ángulo de grados a radianes multiplicamos por:

$$\frac{\pi}{180}$$

Es decir:

$$\alpha^\circ = \alpha \cdot \frac{\pi}{180}$$

a) 45°

$$45^\circ = 45 \cdot \frac{\pi}{180}$$

$$45^\circ = \frac{45\pi}{180}$$

Simplificamos:

$$45^\circ = \frac{\pi}{4}$$

$$45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

b) 60°

$$60^\circ = 60 \cdot \frac{\pi}{180}$$

$$60^\circ = \frac{60\pi}{180}$$

Simplificamos:

$$60^\circ = \frac{\pi}{3}$$

$$60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

Ejercicio 2. Pasar de radianes a grados

Pasa los siguientes ángulos de radianes a grados:

a) $\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{5\pi}{4}$

Solución

Para pasar de radianes a grados usamos la relación fundamental:

$$\pi \text{ radianes} = 180^\circ$$

Por tanto, para convertir de radianes a grados multiplicamos por:

$$\frac{180^\circ}{\pi}$$

a) $\frac{\pi}{6}$

$$\frac{\pi}{6} \text{ rad} = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$$

Simplificamos π :

$$\frac{\pi}{6} \text{ rad} = \frac{180^\circ}{6} = 30^\circ$$

$$\boxed{\frac{\pi}{6} \text{ rad} = 30^\circ}$$

b) $\frac{5\pi}{4}$

$$\frac{5\pi}{4} \text{ rad} = \frac{5\pi}{4} \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$$

Simplificamos π :

$$\frac{5\pi}{4} \text{ rad} = \frac{5 \cdot 180^\circ}{4}$$

$$\frac{5\pi}{4} \text{ rad} = 5 \cdot 45^\circ = 225^\circ$$

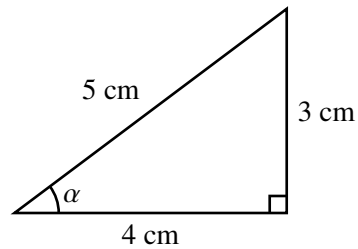
$$\boxed{\frac{5\pi}{4} \text{ rad} = 225^\circ}$$

Ejercicio 3. Razones trigonométricas en un triángulo rectángulo

Calcula las razones trigonométricas indicadas en cada triángulo rectángulo.

a) En el siguiente triángulo rectángulo, los catetos miden 3 cm y 4 cm, y la hipotenusa mide 5 cm. Tomando como referencia el ángulo α , calcula:

$$\sin \alpha, \quad \cos \alpha, \quad \tan \alpha.$$



Solución

Apartado a)

Tenemos un triángulo rectángulo de lados:

$$3, \quad 4, \quad 5.$$

La hipotenusa es el lado mayor:

$$\text{hipotenusa} = 5.$$

Respecto al ángulo α :

$$\text{cateto opuesto} = 3,$$

$$\text{cateto contiguo} = 4,$$

$$\text{hipotenusa} = 5.$$

Recordamos las razones trigonométricas básicas:

$$\sin \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}},$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}},$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}}.$$

Por tanto:

$$\sin \alpha = \frac{3}{5},$$

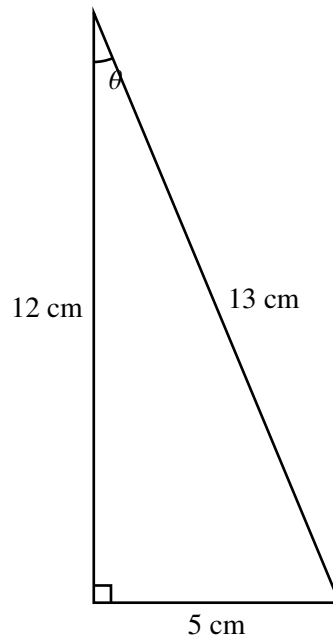
$$\cos \alpha = \frac{4}{5},$$

$$\tan \alpha = \frac{3}{4}.$$

$$\boxed{\sin \alpha = \frac{3}{5}, \quad \cos \alpha = \frac{4}{5}, \quad \tan \alpha = \frac{3}{4}}$$

b) En el siguiente triángulo rectángulo, los catetos miden 5 cm y 12 cm, y la hipotenusa mide 13 cm. Tomando como referencia el ángulo θ , calcula:

$$\sin \theta, \quad \cos \theta, \quad \tan \theta.$$

**Solución****Apartado b)**

Tenemos un triángulo rectángulo de lados:

$$5, \quad 12, \quad 13.$$

La hipotenusa es el lado mayor:

$$\text{hipotenusa} = 13.$$

Respecto al ángulo θ :

$$\text{cateto opuesto} = 5,$$

$$\text{cateto contiguo} = 12,$$

$$\text{hipotenusa} = 13.$$

Por tanto:

$$\sin \theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{5}{13},$$

$$\cos \theta = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{12}{13},$$

$$\tan \theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{5}{12}.$$

$$\sin \theta = \frac{5}{13}, \quad \cos \theta = \frac{12}{13}, \quad \tan \theta = \frac{5}{12}$$

Ejercicio 4. Hallar todas las razones trigonométricas

En un triángulo rectángulo se sabe que:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{2}$$

Halla el resto de razones trigonométricas de α .

Solución

Sabemos que el seno de un ángulo en un triángulo rectángulo es:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

Como:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{2}$$

podemos interpretar que:

$$\text{cateto opuesto} = 1$$

$$\text{hipotenusa} = 2$$

Ahora hallamos el cateto contiguo usando el teorema de Pitágoras:

$$(\text{cateto contiguo})^2 + 1^2 = 2^2$$

$$(\text{cateto contiguo})^2 + 1 = 4$$

$$(\text{cateto contiguo})^2 = 3$$

$$\text{cateto contiguo} = \sqrt{3}$$

Por tanto, respecto al ángulo α , tenemos:

$$\text{cateto opuesto} = 1, \quad \text{cateto contiguo} = \sqrt{3}, \quad \text{hipotenusa} = 2$$

Ahora calculamos las razones trigonométricas:

$$\cos \alpha = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Las razones recíprocas son:

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} = 2$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \sqrt{3}$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = 2,$$

$$\sec \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\cot \alpha = \sqrt{3}$$

Ejercicio 5. Ley de los senos

En un triángulo se sabe que el lado a mide 10 cm, y que dicho lado está opuesto al ángulo de 30° . Además, el lado b está opuesto al ángulo de 45° . Halla el valor de b .

$$a = 10 \text{ cm}, \quad A = 30^\circ, \quad B = 45^\circ$$

Solución

Para resolver este ejercicio usamos la ley de los senos:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

Sustituimos los datos del problema:

$$\frac{10}{\sin 30^\circ} = \frac{b}{\sin 45^\circ}$$

Sabemos que:

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

y

$$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Por tanto:

$$\frac{10}{\frac{1}{2}} = \frac{b}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Calculamos el primer miembro:

$$\frac{10}{\frac{1}{2}} = 20$$

Así que:

$$20 = \frac{b}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Despejamos b :

$$b = 20 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$b = 10\sqrt{2}$$

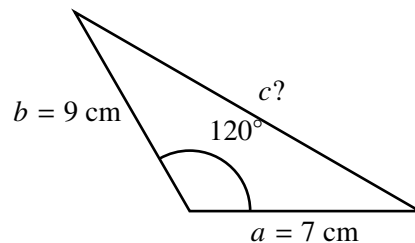
$$b = 10\sqrt{2} \text{ cm}$$

Ejercicio 6. Ley de los cosenos

En un triángulo se conocen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos:

$$a = 7 \text{ cm}, \quad b = 9 \text{ cm}, \quad C = 120^\circ$$

Halla el lado c , opuesto al ángulo de 120° .



Solución

Para resolver este ejercicio usamos la ley de los cosenos:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Sustituimos los datos:

$$c^2 = 7^2 + 9^2 - 2 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \cos 120^\circ$$

Calculamos:

$$7^2 = 49$$

$$9^2 = 81$$

Además:

$$\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$$

Por tanto:

$$c^2 = 49 + 81 - 126 \left(-\frac{1}{2} \right)$$

$$c^2 = 130 + 63$$

$$c^2 = 193$$

Tomamos raíz cuadrada:

$$c = \sqrt{193}$$

$$c = \sqrt{193} \text{ cm}$$

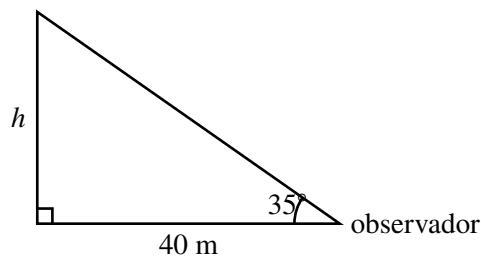
$$c \approx 13,89 \text{ cm}$$

Ejercicio 7. Altura de un edificio

Nos situamos a 40 m de un edificio.

Desde nuestra posición, en el suelo, observamos la parte superior del edificio con un ángulo de elevación de 35° .

Halla la altura del edificio.



Solución

La situación forma un triángulo rectángulo.

Respecto al ángulo de 35° :

cateto contiguo = 40

cateto opuesto = h

donde h es la altura del edificio.

Usamos la tangente:

$$\tan 35^\circ = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}}$$

Por tanto:

$$\tan 35^\circ = \frac{h}{40}$$

Despejamos h :

$$h = 40 \tan 35^\circ$$

Calculamos:

$$h \approx 40 \cdot 0,7002$$

$$h \approx 28,01$$

$$h \approx 28,01 \text{ m}$$

Ejercicio 8. Área de un triángulo con dos lados y el ángulo comprendido

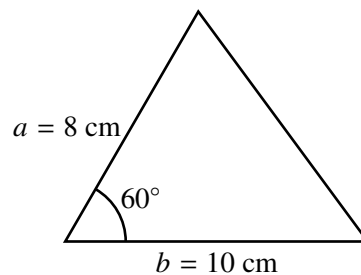
En un triángulo se conocen dos lados:

$$a = 8 \text{ cm}, \quad b = 10 \text{ cm}$$

El ángulo comprendido entre ellos mide:

$$60^\circ$$

Halla el área del triángulo.



Solución

Cuando conocemos dos lados de un triángulo y el ángulo comprendido entre ellos, podemos usar la fórmula:

$$A = \frac{1}{2}ab \sen C$$

En este caso:

$$a = 8$$

$$b = 10$$

$$C = 60^\circ$$

Sustituimos en la fórmula:

$$A = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 10 \cdot \sen 60^\circ$$

Calculamos:

$$\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 10 = 40$$

Por tanto:

$$A = 40 \sen 60^\circ$$

Sabemos que:

$$\sen 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Entonces:

$$A = 40 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$A = 20\sqrt{3}$$

$$A = 20\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$A \approx 34,64 \text{ cm}^2$$

Ejercicio 9. Demostrar igualdades trigonométricas

Demuestra las siguientes igualdades trigonométricas:

a) $\tan x + \cot x = \sec x \cdot \operatorname{cosec} x$

b) $\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \tan x$

Solución

a) Demostramos que

$$\tan x + \cot x = \sec x \cdot \operatorname{cosec} x$$

Partimos del primer miembro:

$$\tan x + \cot x$$

Escribimos la tangente y la cotangente usando seno y coseno:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Entonces:

$$\tan x + \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}$$

Sumamos las fracciones:

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x}$$

Usamos la identidad fundamental:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Por tanto:

$$\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\sin x \cos x}$$

Ahora separamos:

$$\frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1}{\sin x}$$

Como:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

y

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

obtenemos:

$$\frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \sec x \cdot \operatorname{cosec} x$$

$$\tan x + \cot x = \sec x \cdot \operatorname{cosec} x$$

b) Demostramos que

$$\frac{1 - \cos 2x}{\operatorname{sen} 2x} = \tan x$$

Partimos del primer miembro:

$$\frac{1 - \cos 2x}{\operatorname{sen} 2x}$$

Usamos las identidades del ángulo doble:

$$\cos 2x = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 x$$

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$$

Sustituimos:

$$\frac{1 - \cos 2x}{\operatorname{sen} 2x} = \frac{1 - (1 - 2 \operatorname{sen}^2 x)}{2 \operatorname{sen} x \cos x}$$

Simplificamos el numerador:

$$1 - (1 - 2 \operatorname{sen}^2 x) = 2 \operatorname{sen}^2 x$$

Entonces:

$$\frac{1 - \cos 2x}{\operatorname{sen} 2x} = \frac{2 \operatorname{sen}^2 x}{2 \operatorname{sen} x \cos x}$$

Simplificamos:

$$\frac{2 \operatorname{sen}^2 x}{2 \operatorname{sen} x \cos x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

Y como:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \tan x$$

queda demostrado que:

$$\frac{1 - \cos 2x}{\operatorname{sen} 2x} = \tan x$$

$$\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \tan x$$

Ejercicio 10. Resolver una ecuación trigonométrica

Resuelve la siguiente ecuación trigonométrica:

$$\cos(3x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Solución

Sabemos que el coseno vale $\frac{\sqrt{3}}{2}$ en los ángulos:

$$\frac{\pi}{6} \quad \text{y} \quad \frac{11\pi}{6}$$

Por tanto, como el ángulo que aparece en el coseno es $3x$, escribimos:

$$3x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

o bien:

$$3x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$$

donde:

$$k \in \mathbb{Z}$$

Ahora despejamos x .

$$x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$$

o bien:

$$x = \frac{11\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$$

Por tanto, la solución general es:

$$x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$$

$$x = \frac{11\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

Si queremos las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi]$, obtenemos:

$$x = \frac{\pi}{18}, \frac{11\pi}{18}, \frac{13\pi}{18}, \frac{23\pi}{18}, \frac{25\pi}{18}, \frac{35\pi}{18}$$

$$x \in \left\{ \frac{\pi}{18}, \frac{11\pi}{18}, \frac{13\pi}{18}, \frac{23\pi}{18}, \frac{25\pi}{18}, \frac{35\pi}{18} \right\} \text{ en } [0, 2\pi]$$

Resumen final

En esta clase hemos trabajado las ideas principales de la trigonometría elemental:

- pasar de grados a radianes;
- pasar de radianes a grados;
- calcular razones trigonométricas en un triángulo rectángulo;
- usar el teorema de Pitágoras para completar un triángulo;
- aplicar la ley de los senos;
- aplicar la ley de los cosenos;
- resolver problemas reales con la tangente;
- calcular áreas usando trigonometría;
- demostrar identidades trigonométricas;
- resolver una ecuación trigonométrica sencilla.

Idea clave

La trigonometría empieza con una idea muy sencilla: relacionar ángulos y lados. A partir de ahí aparecen herramientas muy potentes para resolver triángulos, calcular alturas, áreas y estudiar funciones periódicas.