

10 LÍMITES RESUELTOS A TRAVÉS DE GRÁFICAS

MATEMÁTICAS CON JUAN

Vídeo de estos ejercicios aquí:

<https://www.youtube.com/watch?v=0z5DqRzh0Mc>

Ejercicio 1. Límite a partir de una gráfica

Para la función $f(x)$, establece los siguientes valores:

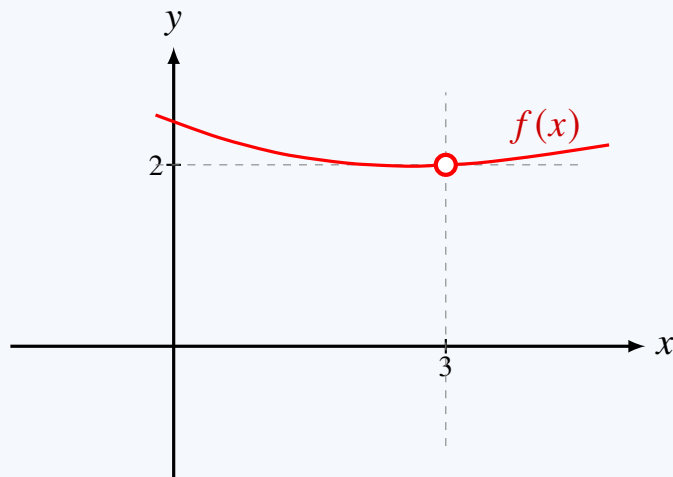
a) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

d) $f(3)$

La gráfica de la función es la siguiente:



Solución

Observamos la gráfica con cuidado.
En $x = 3$ aparece un punto abierto en

$$(3, 2).$$

Esto significa que la función se aproxima a la altura 2 cuando x se acerca a 3, pero la función no toma el valor 2 en $x = 3$.

Además, no aparece ningún punto cerrado con abscisa $x = 3$. Por tanto, la función no está definida en $x = 3$.

a) Límite por la derecha

El límite por la derecha es

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x).$$

Esto significa que x se acerca a 3 usando valores mayores que 3.

Mirando la gráfica por la derecha, vemos que la curva se aproxima a la altura 2. Por tanto:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 2}$$

b) Límite por la izquierda

El límite por la izquierda es

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x).$$

Esto significa que x se acerca a 3 usando valores menores que 3.

Mirando la gráfica por la izquierda, vemos que la curva también se aproxima a la altura 2. Por tanto:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2}$$

c) Límite cuando $x \rightarrow 3$

Para que exista el límite

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x),$$

los dos límites laterales deben coincidir.

Como

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2$$

y

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 2,$$

entonces:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2}$$

d) Valor de la función en $x = 3$

Ahora no preguntamos hacia dónde se acerca la gráfica, sino si la función tiene algún valor definido cuando $x = 3$.

En la gráfica, el punto $(3, 2)$ es abierto. Además, no hay ningún punto cerrado con abscisa $x = 3$.

Por tanto:

$$\boxed{f(3) \text{ no existe}}$$

Conclusión

La función se aproxima al valor 2 cuando x se acerca a 3, pero no está definida en $x = 3$.

Por tanto:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2}$$

pero

$$\boxed{f(3) \text{ no existe}}$$

La función no es continua en $x = 3$, porque el límite existe, pero la función no está definida en ese punto.

Ejercicio 2. Límites laterales en $x = 0$

Para la función $f(x)$, establece los siguientes valores:

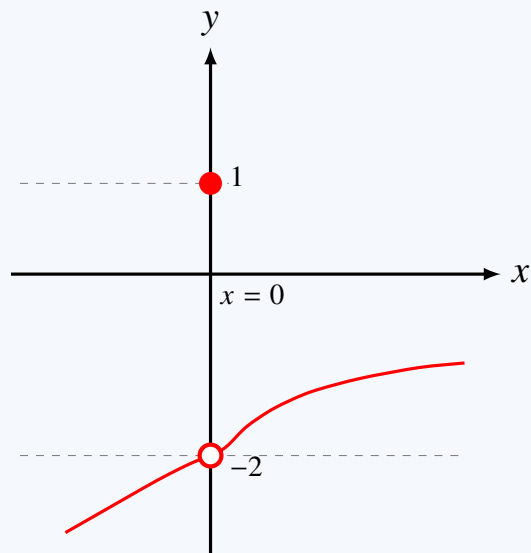
a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

d) $f(0)$

La gráfica de la función es la siguiente:



Solución

Observamos la gráfica.

En $x = 0$ aparecen dos elementos importantes:

un punto abierto en $(0, -2)$,

y

un punto cerrado en $(0, 1)$.

El punto abierto en $(0, -2)$ indica que la gráfica se aproxima al valor -2 , pero no toma ese valor cuando $x = 0$.

El punto cerrado en $(0, 1)$ indica que el valor real de la función en $x = 0$ es 1 .

a) Límite por la izquierda

El límite por la izquierda es

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x).$$

Esto significa que x se acerca a 0 usando valores menores que 0 .

Mirando la gráfica por la izquierda, vemos que la función se aproxima a la altura -2 . Por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -2$$

b) Límite por la derecha

El límite por la derecha es

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x).$$

Esto significa que x se acerca a 0 usando valores mayores que 0.

Mirando la gráfica por la derecha, vemos que la función también se aproxima a la altura -2 . Por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -2$$

c) Límite cuando $x \rightarrow 0$

Para que exista el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x),$$

los dos límites laterales deben coincidir.

Como

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -2$$

y

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -2,$$

entonces:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -2$$

d) Valor de la función en $x = 0$

Ahora no preguntamos hacia dónde se acerca la gráfica, sino cuánto vale realmente la función cuando $x = 0$.

En la gráfica hay un punto cerrado en

$$(0, 1).$$

Por tanto:

$$f(0) = 1$$

Conclusión

Tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -2,$$

pero

$$f(0) = 1.$$

Por tanto:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)}$$

La función no es continua en $x = 0$, porque el límite existe, pero no coincide con el valor de la función en ese punto.

Ejercicio 3. Límites laterales distintos

Para la función $f(x)$, establece los siguientes valores:

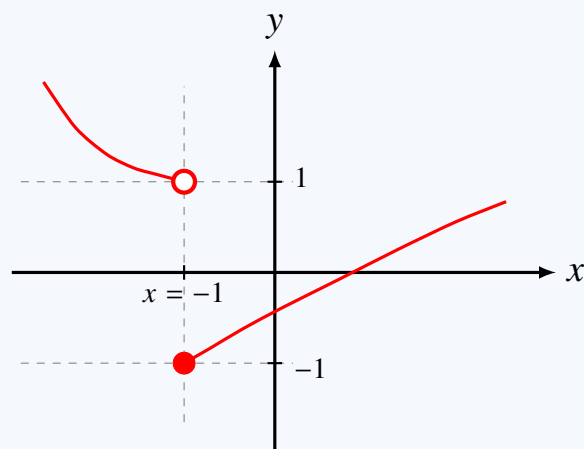
a) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

d) $f(-1)$

La gráfica de la función es la siguiente:



Solución

Observamos la gráfica.

En $x = -1$ aparecen dos comportamientos diferentes:

por la izquierda, la gráfica se acerca a 1,

mientras que

por la derecha, la gráfica se acerca a -1 .

Además, en $x = -1$ hay un punto cerrado en

$$(-1, -1).$$

Por tanto, el valor real de la función en $x = -1$ es -1 .

a) Límite por la izquierda

El límite por la izquierda es

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x).$$

Esto significa que x se acerca a -1 usando valores menores que -1 .

Mirando la gráfica por la izquierda, vemos que la función se aproxima a la altura 1. Por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 1$$

b) Límite por la derecha

El límite por la derecha es

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x).$$

Esto significa que x se acerca a -1 usando valores mayores que -1 .

Mirando la gráfica por la derecha, vemos que la función se aproxima a la altura -1 . Por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -1$$

c) Límite cuando $x \rightarrow -1$

Para que exista el límite

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x),$$

los dos límites laterales deben coincidir.

Pero en este caso:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 1$$

y

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -1.$$

Como los límites laterales son distintos, el límite no existe:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) \text{ no existe}$$

d) Valor de la función en $x = -1$

Ahora no preguntamos hacia dónde se acerca la gráfica, sino cuánto vale realmente la función cuando $x = -1$.

En la gráfica hay un punto cerrado en

$$(-1, -1).$$

Por tanto:

$$f(-1) = -1$$

Conclusión

En este ejercicio ocurre que los límites laterales son diferentes:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 1$$

pero

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -1.$$

Por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) \text{ no existe}$$

La función no es continua en $x = -1$, porque el límite en ese punto no existe.

Ejercicio 4. Límites infinitos y asíntota vertical

Para la función $f(x)$, establece los siguientes valores:

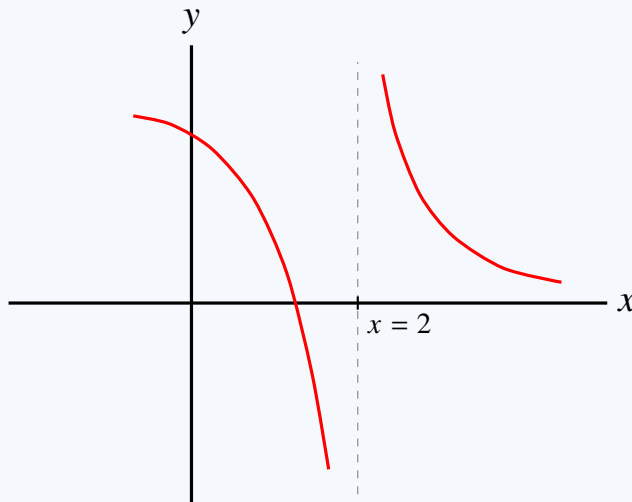
a) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

d) $f(2)$

La gráfica de la función es la siguiente:



Solución

Observamos la gráfica.

En $x = 2$ aparece una línea vertical discontinua. Esa línea indica una posible asíntota vertical.

La función no tiene ningún punto definido en $x = 2$, pero sí podemos estudiar qué ocurre cuando x se acerca a 2 por la izquierda y por la derecha.

a) Límite por la izquierda

El límite por la izquierda es

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x).$$

Esto significa que x se acerca a 2 usando valores menores que 2.

Mirando la gráfica por la izquierda, vemos que la función desciende sin límite. Es decir, sus valores se hacen cada vez más negativos.

Por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$$

b) Límite por la derecha

El límite por la derecha es

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x).$$

Esto significa que x se acerca a 2 usando valores mayores que 2.

Mirando la gráfica por la derecha, vemos que la función crece sin límite cuando se acerca a $x = 2$. Es decir, sus valores se hacen cada vez más grandes.

Por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$$

c) Límite cuando $x \rightarrow 2$

Para que exista el límite

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x),$$

los dos límites laterales deben coincidir.

Pero en este caso:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$$

y

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty.$$

Como los límites laterales no coinciden, concluimos que:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ no existe}$$

d) Valor de la función en $x = 2$

Ahora preguntamos si la función tiene algún valor definido cuando $x = 2$.

En la gráfica no aparece ningún punto cerrado con abscisa $x = 2$. Además, la recta $x = 2$ actúa como una asíntota vertical.

Por tanto:

$$f(2) \text{ no existe}$$

Conclusión

Tenemos que:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$$

y

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty.$$

Por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ no existe}$$

La función no es continua en $x = 2$, porque ni siquiera está definida en ese punto y, además, presenta una asíntota vertical.

Ejercicio 5. Límite infinito por ambos lados

Para la función $f(x)$, establece los siguientes valores:

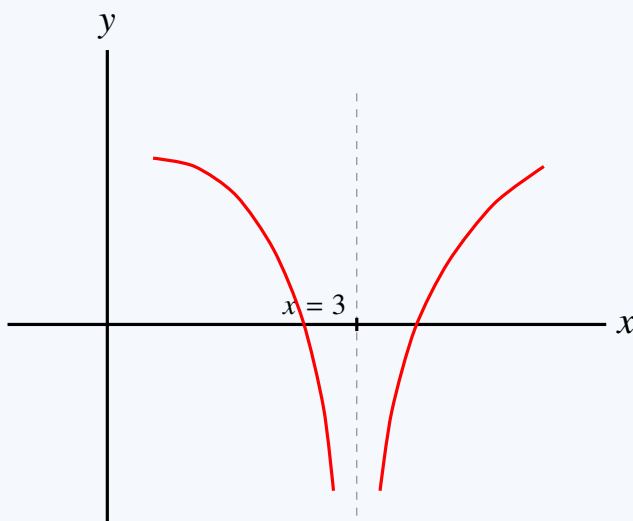
a) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

d) $f(3)$

La gráfica de la función es la siguiente:



Solución

Observamos la gráfica.

En $x = 3$ aparece una línea vertical discontinua. Esa línea indica una asíntota vertical.

También aparece una pequeña marca sobre el eje x , pero esa marca solo sirve para señalar el valor $x = 3$. No representa un punto de la función.

Por tanto, no hay ningún punto cerrado con abscisa $x = 3$. Eso significa que la función no está definida en $x = 3$.

a) Límite por la izquierda

El límite por la izquierda es

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x).$$

Esto significa que x se acerca a 3 usando valores menores que 3.

Mirando la gráfica por la izquierda, vemos que la función desciende sin límite. Es decir, sus valores se hacen cada vez más negativos.

Por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$$

b) Límite por la derecha

El límite por la derecha es

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x).$$

Esto significa que x se acerca a 3 usando valores mayores que 3.

Mirando la gráfica por la derecha, vemos que la función también desciende sin límite cuando x se acerca a 3.

Por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -\infty$$

c) Límite cuando $x \rightarrow 3$

Los dos límites laterales tienen el mismo comportamiento:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$$

y

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -\infty.$$

Por tanto, escribimos:

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -\infty$$

Esto significa que la función baja sin límite por ambos lados de $x = 3$.

d) Valor de la función en $x = 3$

Ahora preguntamos si la función tiene algún valor definido cuando $x = 3$.

En la gráfica no aparece ningún punto cerrado con abscisa $x = 3$. La marca que aparece sobre el eje x solo señala la posición $x = 3$.

Por tanto:

$$f(3) \text{ no existe}$$

Conclusión

Tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -\infty,$$

pero

$$f(3) \text{ no existe.}$$

La función no es continua en $x = 3$, porque no está definida en ese punto y presenta una asíntota vertical.

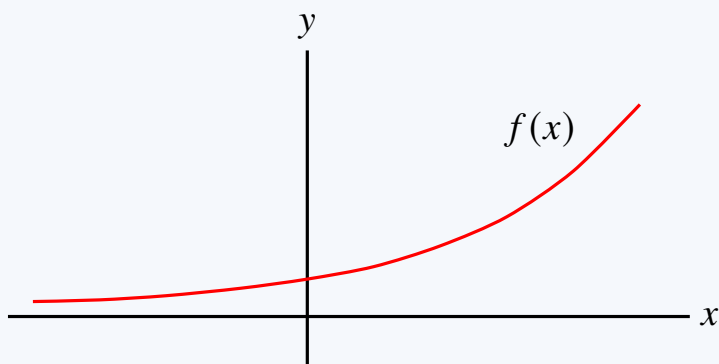
Ejercicio 6. Límites en el infinito

Para la función $f(x)$, establece los siguientes valores:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

La gráfica de la función es la siguiente:



Solución

Observamos la gráfica.

En este ejercicio no estudiamos qué ocurre cerca de un número concreto, sino qué ocurre cuando x se hace muy grande o muy pequeño.

a) Límite cuando $x \rightarrow +\infty$

El límite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

describe qué ocurre con la función cuando x avanza indefinidamente hacia la derecha.

Mirando la gráfica, vemos que cuando x aumenta, la función también aumenta cada vez más.

Por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

b) Límite cuando $x \rightarrow -\infty$

El límite

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

describe qué ocurre con la función cuando x avanza indefinidamente hacia la izquierda.

Mirando la gráfica, vemos que la función se va acercando al eje x .

El eje x corresponde a la recta

$$y = 0.$$

Por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

Conclusión

Tenemos que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

y

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

Esto significa que la función crece sin límite hacia la derecha y se aproxima a la recta $y = 0$ hacia la izquierda.

La recta

$$y = 0$$

es una asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$.

Ejercicio 7. Límites laterales de $\ln x$

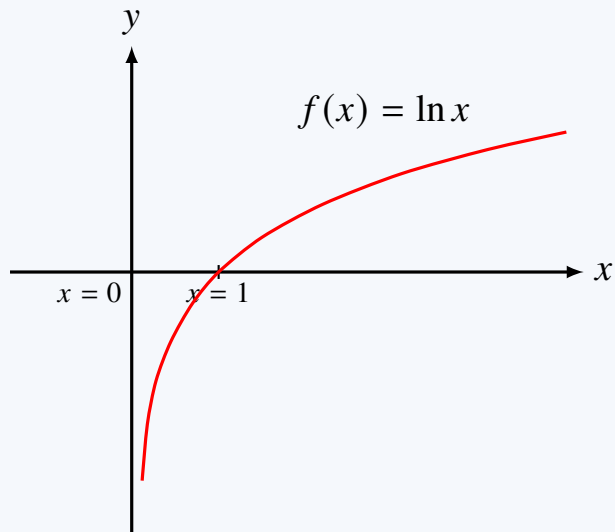
Para la función $f(x) = \ln x$, establece los siguientes valores:

a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \ln x$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x$$

La gráfica de la función es la siguiente:



Solución

La función es

$$f(x) = \ln x.$$

Lo primero que debemos recordar es su dominio:

$$x > 0$$

Esto significa que la función solo está definida para valores positivos de x .

a) Límite por la izquierda en $x = 0$

Queremos estudiar:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \ln x$$

Pero este límite lateral exige que x se acerque a 0 tomando valores menores que 0.

Eso no es posible, porque $\ln x$ no está definida para $x < 0$.

Por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \ln x \text{ no existe}$$

b) Límite por la derecha en $x = 0$

Ahora estudiamos:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x$$

Esto significa que x se acerca a 0 tomando valores positivos.

Cuando x se aproxima a 0 por la derecha, la gráfica baja sin límite.

Por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

c) Límite cuando $x \rightarrow +\infty$

Ahora estudiamos:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x$$

Cuando x crece cada vez más, la función $\ln x$ también crece, aunque lo hace lentamente.

Por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

Conclusión

Los resultados son:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \ln x \text{ no existe}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

La función $f(x) = \ln x$ no está definida para $x \leq 0$, por eso no existe límite por la izquierda en $x = 0$.

Ejercicio 8. Estudio de límites en $x = 0$ y en el infinito

Para la función $f(x)$, establece los siguientes valores:

a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

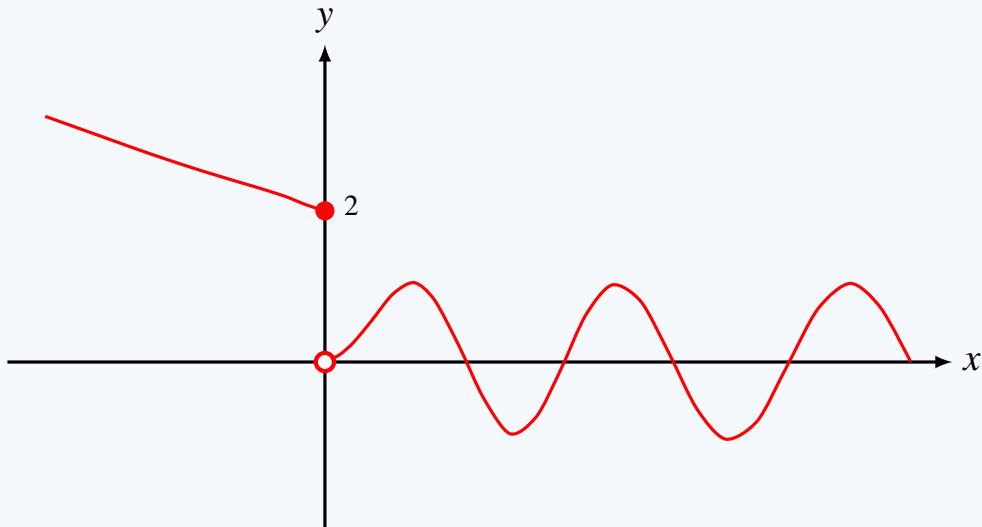
c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

d) $f(0)$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$f) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

La gráfica de la función es la siguiente:



Solución

Observamos la gráfica con atención.

En $x = 0$ aparecen dos elementos importantes:

un punto cerrado en $(0, 2)$,

y

un punto abierto en $(0, 0)$.

El punto cerrado indica el valor real de la función en $x = 0$, mientras que el punto abierto indica el valor al que se aproxima la rama derecha cuando x se acerca a 0.

a) Límite por la izquierda en $x = 0$

Estudiamos:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

Cuando x se acerca a 0 por la izquierda, la gráfica se aproxima al punto $(0, 2)$.

Por tanto:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2}$$

b) Límite por la derecha en $x = 0$

Estudiamos:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

Cuando x se acerca a 0 por la derecha, la gráfica se aproxima al punto abierto $(0, 0)$.

Por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$$

c) Límite cuando $x \rightarrow 0$

Para que exista el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x),$$

los dos límites laterales deben coincidir.

Pero aquí:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2$$

y

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0.$$

Como son distintos, concluimos que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ no existe}$$

d) Valor de la función en $x = 0$

El valor real de la función en $x = 0$ viene dado por el punto cerrado.

Como ese punto es

$$(0, 2),$$

tenemos:

$$f(0) = 2$$

e) Límite cuando $x \rightarrow +\infty$

Ahora observamos la gráfica hacia la derecha.

La función oscila continuamente: sube y baja una y otra vez, sin acercarse a un único valor.

Por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ no existe}$$

f) Límite cuando $x \rightarrow -\infty$

Ahora observamos la rama izquierda.

Cuando x toma valores muy negativos, la gráfica sube cada vez más.

Por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

Conclusión

Los resultados finales son:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ no existe}$$

$$f(0) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ no existe}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

La función no es continua en $x = 0$, porque los límites laterales en ese punto son distintos.

Ejercicio 9. Límites cuando $x \rightarrow 2$ y valores de la función

Para la función $f(x)$, establece los siguientes valores:

a) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

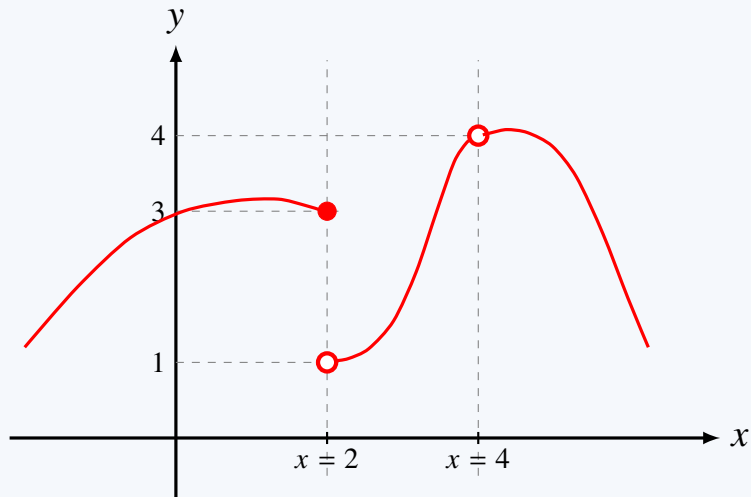
b) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

d) $f(2)$

e) $f(4)$

La gráfica de la función es la siguiente:



Solución

Observamos la gráfica con atención.

En $x = 2$ aparecen dos puntos importantes:

un punto cerrado en $(2, 3)$,

y

un punto abierto en $(2, 1)$.

El punto cerrado indica el valor real de la función en $x = 2$, mientras que el punto abierto indica el valor al que se aproxima la rama derecha cuando $x \rightarrow 2^+$.

Además, en $x = 4$ aparece un punto abierto en

$(4, 4)$,

y no aparece ningún punto cerrado sobre la recta vertical $x = 4$. La curva se aproxima a $(4, 4)$, pero ese punto no pertenece a la función.

a) Límite por la izquierda cuando $x \rightarrow 2$

Estudiamos:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$$

Cuando x se acerca a 2 por la izquierda, la gráfica se aproxima al punto $(2, 3)$.

Por tanto:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3}$$

b) Límite por la derecha cuando $x \rightarrow 2$

Estudiamos:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

Cuando x se acerca a 2 por la derecha, la gráfica se aproxima al punto abierto $(2, 1)$.

Por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$$

c) Límite cuando $x \rightarrow 2$

Para que exista el límite

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x),$$

los dos límites laterales deben coincidir.

Pero aquí:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3$$

y

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1.$$

Como son distintos, concluimos que:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ no existe}$$

d) Valor de la función en $x = 2$

El valor real de la función en $x = 2$ viene dado por el punto cerrado.

Como ese punto es

$$(2, 3),$$

tenemos:

$$f(2) = 3$$

e) Valor de la función en $x = 4$

En $x = 4$ aparece un punto abierto en

$$(4, 4),$$

pero no aparece ningún punto cerrado sobre la recta vertical $x = 4$.

Por tanto:

$$f(4) \text{ no existe}$$

Conclusión

Los resultados finales son:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ no existe}$$

$$f(2) = 3$$

$$f(4) \text{ no existe}$$

La función no es continua en $x = 2$, porque los límites laterales no coinciden.

Ejercicio 10. Estudio de límites en $x = -4$, $x = -1$ y $x = 2$

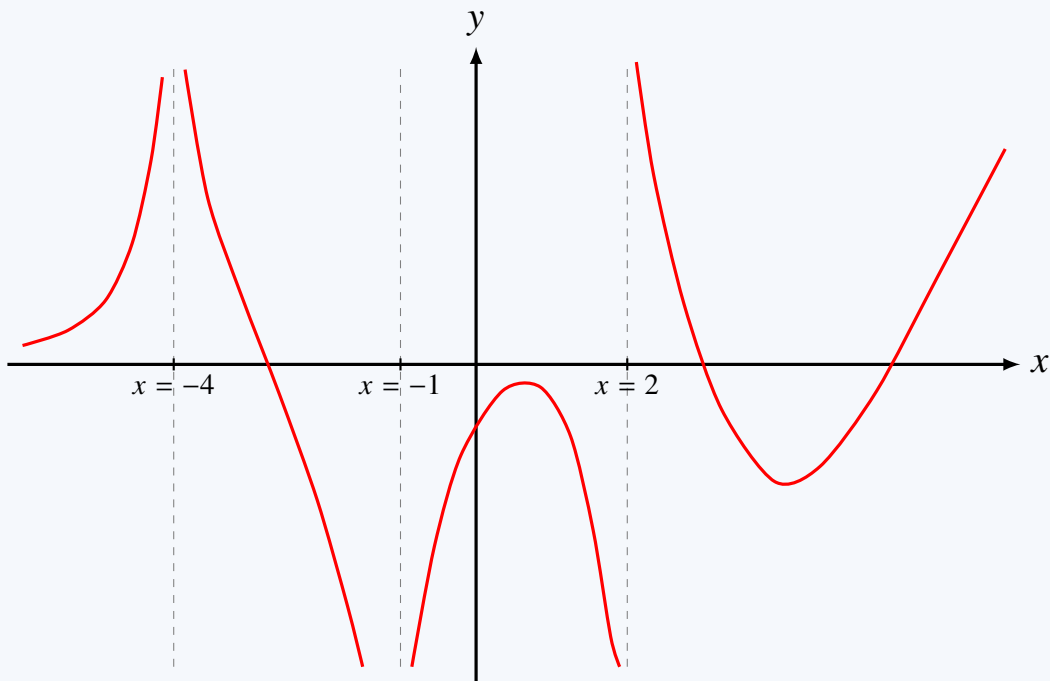
Para la función $f(x)$, establece los siguientes valores:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow -4} f(x)$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \quad \text{e) } \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \quad \text{f) } \lim_{x \rightarrow -1} f(x)$$

$$\text{g) } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \quad \text{h) } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \quad \text{i) } \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

La gráfica de la función es la siguiente:



Solución

Observamos la gráfica con atención.

En la figura aparecen tres rectas verticales destacadas:

$$x = -4, \quad x = -1, \quad x = 2.$$

Vamos a estudiar qué ocurre con la función al acercarnos a cada una de ellas.

1) Límites en $x = -4$

Por la izquierda:

Cuando $x \rightarrow -4^-$, la rama de la izquierda sube sin límite.

Por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = +\infty$$

Por la derecha:

Cuando $x \rightarrow -4^+$, la rama situada entre -4 y -1 también sube sin límite al acercarse a $x = -4$.

Por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = +\infty$$

Como ambos límites laterales coinciden, concluimos que:

$$\lim_{x \rightarrow -4} f(x) = +\infty$$

2) Límites en $x = -1$

Por la izquierda:

Cuando $x \rightarrow -1^-$, la rama situada entre -4 y -1 baja sin límite.

Por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$$

Por la derecha:

Cuando $x \rightarrow -1^+$, la rama situada entre -1 y 2 también baja sin límite.

Por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$$

Como ambos límites laterales coinciden, concluimos que:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$$

3) Límites en $x = 2$

Por la izquierda:

Cuando $x \rightarrow 2^-$, la rama situada entre -1 y 2 baja sin límite.

Por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$$

Por la derecha:

Cuando $x \rightarrow 2^+$, la rama de la derecha sube sin límite.

Por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$$

Como los dos límites laterales no coinciden, el límite bilateral no existe:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ no existe}$$

Conclusión

Los resultados finales son:

$$\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -4} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ no existe}$$

Observamos además que hay asíntotas verticales en

$$x = -4, \quad x = -1, \quad x = 2.$$

Vídeo de estos ejercicios

Estos ejercicios están resueltos también en formato vídeo aquí:

<https://www.youtube.com/watch?v=0z5DqRzh0Mc>