

100 Ejercicios de Potencias y Radicales

MATEMÁTICAS CON JUAN

Más recursos en youtube.com/@matematicaconjuan

Calentando Motores (1–15)

Ejercicio 1: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

Solución:

1. Multiplicación repetida: 2^4 .
2. Resultado: $2^4 = 16$.

Ejercicio 2: $2^2 \cdot 2^3$

Solución:

1. Suma de exponentes: $2 + 3 = 5$.
2. $2^5 = 32$.

Ejercicio 3: $2^5 \cdot 2^{-3}$

Solución:

1. Suma de exponentes: $5 + (-3) = 2$.
2. $2^2 = 4$.

Ejercicio 4: $2^5 \cdot 2^3 \cdot 2^{-4}$

Solución:

1. Observamos que todos los factores tienen la misma base: 2.
2. Sumamos los exponentes: $5 + 3 + (-4) = 4$.
3. Aplicamos la propiedad de potencias: $2^5 \cdot 2^3 \cdot 2^{-4} = 2^4$.
4. Calculamos el resultado: $2^4 = 16$.

Ejercicio 5: $2^{-2} \cdot 3^5 \cdot 2^4 \cdot 3^{-3}$

Solución:

1. Agrupamos potencias de la misma base.
2. Para la base 2: sumamos los exponentes $-2 + 4 = 2$, así que $2^{-2} \cdot 2^4 = 2^2$.
3. Para la base 3: sumamos los exponentes $5 + (-3) = 2$, así que $3^5 \cdot 3^{-3} = 3^2$.
4. Multiplicamos los resultados: $2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36$.
5. Por lo tanto, $2^{-2} \cdot 3^5 \cdot 2^4 \cdot 3^{-3} = 36$.

Ejercicio 6: $3^3 + 3^3 + 3^3$ **Solución:**

1. Calculamos: $3^3 = 27$.
2. $27 + 27 + 27 = 81$.

Ejercicio 7: $4^4 + 4^4 + 4^4 + 4^4$ **Solución:**

1. Observamos que la suma tiene cuatro sumandos iguales, todos ellos 4^4 .
2. Sumamos: $4^4 + 4^4 + 4^4 + 4^4 = 4 \times 4^4$.
3. Utilizamos la propiedad de las potencias: $a \times a^n = a^{n+1}$.
4. Aplicamos la propiedad: $4 \times 4^4 = 4^1 \times 4^4 = 4^{1+4} = 4^5$.
5. Calculamos el resultado: $4^5 = (2^2)^5 = 2^{10} = 1024$.
6. Por lo tanto, $4^4 + 4^4 + 4^4 + 4^4 = 1024$.

Ejercicio 8: $\frac{2^5}{2^2}$ **Solución:**

1. Restamos exponentes: $5 - 2 = 3$.
2. $2^3 = 8$.

Ejercicio 9: $(2^3)^2$ **Solución:**

1. Multiplicamos exponentes: $3 \cdot 2 = 6$.
2. $2^6 = 64$.

Ejercicio 10: $((2^2)^2)^2$ **Solución:**

1. Primero resolvemos la potencia más interna: $2^2 = 4$.
2. Ahora tenemos $(4^2)^2$.
3. Calculamos $4^2 = 16$, así que nos queda 16^2 .
4. Calculamos $16^2 = 256$.
5. Alternativamente, aplicamos la ley de potencias encadenadas: $((a^m)^n)^p = a^{m \cdot n \cdot p}$.
6. En este caso: $((2^2)^2)^2 = 2^{2 \cdot 2 \cdot 2} = 2^8 = 256$.
7. Por lo tanto, $((2^2)^2)^2 = 256$.

Ejercicio 11: $(2^3)^5 \cdot (2^4)^{-3}$ **Solución:**

1. $(2^3)^5 = 2^{15}$, $(2^4)^{-3} = 2^{-12}$.
2. $2^{15} \cdot 2^{-12} = 2^3 = 8$.

Ejercicio 12: $4^2 \cdot 2^2$ **Solución:**

1. $4^2 = (2^2)^2 = 2^4$.
2. $2^4 \cdot 2^2 = 2^6 = 64$.

Ejercicio 13: $\frac{8^5 \cdot (2^4)^{-2}}{4^3}$ **Solución:**

1. $8^5 = 2^{15}$, $(2^4)^{-2} = 2^{-8}$, $4^3 = 2^6$.
2. $2^{15} \cdot 2^{-8} = 2^7$.
3. $2^7 / 2^6 = 2^1 = 2$.

Ejercicio 14: $\frac{9^{-2} \cdot 36}{16^{-2} \cdot 27}$ **Solución:**

1. $9^{-2} = 3^{-4}$, $36 = 2^2 \cdot 3^2$, $16^{-2} = 2^{-8}$, $27 = 3^3$.
2. Exponentes de 2: $2 - (-8) = 10$.

3. Exponentes de 3: $-4 + 2 - 3 = -5$.

4. $2^{10} \cdot 3^{-5} = \frac{1024}{243}$.

Ejercicio 15: $\frac{4^{-9} \cdot 5^{-9}}{20^{-11}}$

Solución:

1. $4^{-9} = 2^{-18}$; $20^{-11} = (2^2 \cdot 5)^{-11} = 2^{-22}5^{-11}$.

2. $2^{-18-(-22)} = 2^4 = 16$.

3. $5^{-9-(-11)} = 5^2 = 25$.

4. $16 \cdot 25 = 400$.

Ejercicio 16: $\frac{2^4 - 2^3}{2^5 + 2^3}$

Solución:

1. $2^4 - 2^3 = 16 - 8 = 8$.

2. $2^5 + 2^3 = 32 + 8 = 40$.

3. $8/40 = 1/5$.

Entrenando Paréntesis (17–30)

Ejercicio 17: $(-3)^2$

Solución:

1. Potencia par: $(-3)^2 = 9$.

Ejercicio 18: -3^2

Solución:

1. Sin paréntesis: $-3^2 = -(3^2) = -9$.

Ejercicio 19: $(-3)^3$

Solución:

1. Potencia impar: $(-3)^3 = -27$.

Ejercicio 20: -3^3

Solución:

1. $-3^3 = -(3^3) = -27.$

Ejercicio 21: 3^{-2}

Solución:

1. $3^{-2} = 1/3^2 = 1/9.$

Ejercicio 22: 5^0

Solución:

1. La propiedad fundamental de las potencias indica que cualquier número (excepto el 0) elevado a 0 es 1.
2. Es decir, $a^0 = 1$ para $a \neq 0$.
3. Por tanto, $5^0 = 1$.

Ejercicio 23: $(-1)^{-1}$

Solución:

1. Cuando un número se eleva a un exponente negativo, el resultado es el recíproco de la potencia positiva: $a^{-n} = 1/a^n$.
2. En este caso, $(-1)^{-1} = 1/(-1)^1$.
3. Calculamos la potencia positiva: $(-1)^1 = -1$.
4. Por tanto, $(-1)^{-1} = 1/(-1) = -1$.

Ejercicio 24: -3^{-2}

Solución:

1. $-3^{-2} = -(1/9) = -1/9.$

Ejercicio 25: $(-3)^{-2}$

Solución:

1. $(-3)^{-2} = 1/(-3)^2 = 1/9.$

Ejercicio 26: $(-3)^{-3}$

Solución:

1. $(-3)^{-3} = -1/27$.

Ejercicio 27: $-2^3 + (-2)^2$

Solución:

1. Calculamos $2^3 = 8$. El signo negativo delante indica $-2^3 = -8$.

2. Calculamos $(-2)^2 = (-2) \times (-2) = 4$.

3. Sumamos ambos resultados: $-8 + 4 = -4$.

4. Resultado final: $-2^3 + (-2)^2 = -4$.

Ejercicio 28: $(-3)^2 - (-3^3)$

Solución:

1. $(-3)^2 = 9$.

2. $-3^3 = -27$.

3. $9 - (-27) = 36$.

Ejercicio 29: $(-3)^3 - (-3^{-3})$

Solución:

1. $(-3)^3 = -27$.

2. $-3^{-3} = -1/27$.

3. $-27 - (-1/27) = -27 + 1/27 = -728/27$.

Ejercicio 30: $(-2)^3 - 2^4 - (-2)^2$

Solución:

1. Calculamos $(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$.

2. Calculamos $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$.

3. Por el signo negativo delante, $-2^4 = -(2^4) = -16$.

4. Calculamos $(-2)^2 = (-2) \times (-2) = 4$.

5. Restamos el cuadrado negativo: $-(-2)^2 = -4$.

6. Ahora sumamos y restamos en orden: $(-8) - 16 - 4$.

7. Primero $-8 - 16 = -24$, después $-24 - 4 = -28$.

8. ****Resultado final:**** $(-2)^3 - 2^4 - (-2)^2 = -28$.

Fracciones (31–40)

Ejercicio 31: $\left(\frac{1}{2}\right)^4$

Solución:

1. Elevamos el numerador y el denominador a la cuarta potencia: $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1^4}{2^4}$.
2. Calculamos: $1^4 = 1$ y $2^4 = 16$.
3. Por tanto, $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$.

Ejercicio 32: $\left(-\frac{2}{3}\right)^2$

Solución:

1. Elevamos la fracción $-\frac{2}{3}$ al cuadrado: $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{2}{3}\right)$.
2. Multiplicamos numeradores: $(-2) \times (-2) = 4$.
3. Multiplicamos denominadores: $3 \times 3 = 9$.
4. Resultado: $\frac{4}{9}$.

Ejercicio 33: $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$

Solución:

1. Al elevar una fracción a un exponente negativo, invertimos la fracción y cambiamos el signo del exponente: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$.
2. En este caso: $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{1}\right)^3$.
3. Calculamos la potencia: $3^3 = 27$.
4. Por tanto, $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 27$.

Ejercicio 34: $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}$

Solución:

1. La potencia negativa indica invertir la fracción y elevar al exponente positivo: $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(-\frac{3}{2}\right)^2$.
2. Elevamos al cuadrado: $(-3)^2 = 9$ y $2^2 = 4$.
3. Resultado: $\frac{9}{4}$.

Ejercicio 35: $\left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3$

Solución:

1. Suma de exponentes: $2 + 3 = 5$.
2. $\left(\frac{3}{2}\right)^5 = \frac{243}{32}$.

Ejercicio 36: $\left(\frac{8}{3}\right)^7 : \left(\frac{8}{3}\right)^4$

Solución:

1. Restamos exponentes: $7 - 4 = 3$.
2. $\left(\frac{8}{3}\right)^3 = \frac{512}{27}$.

Ejercicio 37: $16 : \left(-\frac{4}{3}\right)^4$

Solución:

1. $(-4/3)^4 = 256/81$.
2. $16 \div (256/81) = 16 \cdot 81/256 = 81/16$.

Ejercicio 38: $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}$

Solución:

1. Aplicamos la regla de exponente negativo: $a^{-n} = 1/a^n$. Por tanto, $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^3}$.

2. Calculamos la potencia: $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 = -\frac{1^3}{3^3} = -\frac{1}{27}$.

3. Así, el recíproco es $\frac{1}{-\frac{1}{27}} = -27$.

4. Resultado final: $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3} = -27$.

Ejercicio 39: $(2 \cdot (-1)^{126}) \cdot 3^2$

Solución:

1. $(-1)^{126} = 1$ (exponente par).

2. $2 \cdot 1 \cdot 9 = 18$.

Ejercicio 40: $\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{-1} \cdot \frac{4}{3}\right]^2 : \frac{2}{3}$

Solución:

1. Inverso de $\left(\frac{3}{2}\right)$.

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{3}.$$

2. Producto dentro del corchete.

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{9}.$$

3. Elevamos al cuadrado.

$$\left(\frac{8}{9}\right)^2 = \frac{64}{81}.$$

4. División “:” entre $\frac{2}{3}$.

$$\frac{64}{81} : \frac{2}{3} = \frac{64}{81} \times \frac{3}{2} = \frac{192}{162}.$$

5. Simplificamos la fracción final.

$$\frac{192}{162} = \frac{32}{27} \quad (\text{dividimos numerador y denominador por 6}).$$

6. Resultado final.

Expresiones Notables (41–49)

Ejercicio 41: $500^2 - 499^2$

Solución:

1. Diferencia de cuadrados: $(500 - 499)(500 + 499) = 1 \cdot 999 = 999$.

Ejercicio 42: $1003^2 - 997^2$

Solución:

1. $(1003 - 997)(1003 + 997) = 6 \cdot 2000 = 12000$.

Ejercicio 43: $5,9^2 - 5,9 \cdot 4,9$

Solución:

1. Sacamos factor común 5,9:

$$5,9^2 - 5,9 \cdot 4,9 = 5,9(5,9 - 4,9)$$

2. Calculamos la resta del paréntesis:

$$5,9 - 4,9 = 1$$

3. Multiplicamos:

$$5,9 \times 1 = 5,9$$

4. **Resultado:** 5,9.

Ejercicio 44: $16^3 - 16 \cdot 14^2$

Solución:

1. Sacamos factor común 16:

$$16^3 - 16 \cdot 14^2 = 16(16^2 - 14^2)$$

2. Dentro del paréntesis aparece una *diferencia de cuadrados*:

$$16^2 - 14^2 = (16 - 14)(16 + 14) = 2 \cdot 30 = 60$$

3. Multiplicamos el factor común:

$$16 \cdot 60 = 960$$

4. **Resultado:** 960.

Ejercicio 45: $\frac{7,3^2 - 2,4^2}{9,7}$

Solución:

1. **Diferencia de cuadrados en el numerador.**

Utilizamos $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ con $a = 7,3$ y $b = 2,4$:

$$7,3^2 - 2,4^2 = (7,3 - 2,4)(7,3 + 2,4).$$

2. **Evaluamos las sumas y restas.**

$$7,3 - 2,4 = 4,9, \quad 7,3 + 2,4 = 9,7.$$

Por tanto,

$$7,3^2 - 2,4^2 = 4,9 \cdot 9,7.$$

3. **Sustituimos la factorización en la fracción.**

$$\frac{4,9 \cdot 9,7}{9,7}.$$

4. **Simplificamos el factor común 9,7.**

$$\frac{4,9 \cdot 9,7}{9,7} = 4,9.$$

5. **Resultado final.**

$$4,9$$

Ejercicio 46: $\frac{3199^2 - 1}{3198}$

Solución:

1. **Detectamos una diferencia de cuadrados en el numerador.**

La identidad es

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

Tomamos $a = 3199$ y $b = 1$:

$$3199^2 - 1^2 = (3199 - 1)(3199 + 1) = 3198 \cdot 3200.$$

2. Sustituimos esta factorización en la fracción.

$$\frac{3199^2 - 1}{3198} = \frac{3198 \cdot 3200}{3198}.$$

3. Cancelamos el factor común 3198.

$$\frac{3198 \cdot 3200}{3198} = 3200.$$

4. Resultado final.

$$3200$$

Ejercicio 47: $\frac{9^2 - 9 \cdot 8 + 8^2}{9^3 + 8^3}$

Solución:

1. **Reconocimiento de formas notables.** Observemos que, si llamamos $a = 9$ y $b = 8$, entonces

$$a^2 - ab + b^2 = 9^2 - 9 \cdot 8 + 8^2,$$

que coincide exactamente con el numerador.

Por otro lado, recordemos la identidad de suma de cubos:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

Con $a = 9$ y $b = 8$, el denominador se escribe como

$$9^3 + 8^3 = (9 + 8)(9^2 - 9 \cdot 8 + 8^2).$$

2. Sustitución en la fracción.

$$\frac{9^2 - 9 \cdot 8 + 8^2}{(9 + 8)(9^2 - 9 \cdot 8 + 8^2)}.$$

3. Cancelamos el factor común $9^2 - 9 \cdot 8 + 8^2$.

$$\frac{9^2 - 9 \cdot 8 + 8^2}{(9 + 8) 9^2 - 9 \cdot 8 + 8^2} = \frac{1}{9 + 8}.$$

4. Simplificación final.

$$9 + 8 = 17 \implies \frac{1}{9 + 8} = \frac{1}{17}.$$

5. Respuesta.

$$\frac{1}{17}$$

Ejercicio 48: $\frac{7^3 - 5^3}{7^2 + 7 \cdot 5 + 5^2}$

Solución:

1. Identidad utilizada (diferencia de cubos).

Para $a, b \in \mathbb{R}$:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Tomamos $a = 7$ y $b = 5$.

2. Descomponemos el numerador con la identidad.

$$7^3 - 5^3 = (7 - 5)(7^2 + 7 \cdot 5 + 5^2).$$

3. Sustituimos en la fracción.

$$\frac{(7 - 5)(7^2 + 7 \cdot 5 + 5^2)}{7^2 + 7 \cdot 5 + 5^2}.$$

4. Cancelamos el factor común $7^2 + 7 \cdot 5 + 5^2$.

$$\frac{(7 - 5)(7^2 + 7 \cdot 5 + 5^2)}{(7^2 + 7 \cdot 5 + 5^2)} = 7 - 5.$$

5. Evaluamos la resta.

$$7 - 5 = 2.$$

6. Resultado final.

$$2$$

Ejercicio 49: $\frac{5,5^2 + 2 \cdot 5,5 \cdot 1,8 + 1,8^2}{14,6}$

Solución:

1. Identificamos un cuadrado perfecto en el numerador. La expresión

$$5,5^2 + 2 \cdot 5,5 \cdot 1,8 + 1,8^2$$

tiene la forma $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ con $a = 5,5$ y $b = 1,8$. Por tanto

$$5,5^2 + 2 \cdot 5,5 \cdot 1,8 + 1,8^2 = (5,5 + 1,8)^2 = 7,3^2.$$

2. **Observación sobre el denominador.** Dado que $14,6 = 2 \cdot 7,3$, la fracción se reescribe como

$$\frac{7,3^2}{2 \cdot 7,3}.$$

3. **Simplificación inmediata.** Cancelamos el factor $7,3$ común a numerador y denominador:

$$\frac{7,3^2}{2 \cdot 7,3} = \frac{7,3}{2}.$$

4. **Cálculo del valor final.**

$$\frac{7,3}{2} = 3,65.$$

5. **Respuesta final.**

$$3,65$$

Exponentes Racionales y Decimales (50–67)

Ejercicio 50: $49^{1/2}$

Solución:

1. El exponente $\frac{1}{2}$ indica la raíz cuadrada: $a^{1/2} = \sqrt{a}$.
2. Aplicamos: $49^{1/2} = \sqrt{49}$.
3. Calculamos la raíz: $\sqrt{49} = 7$.

Ejercicio 51: $49^{-1/2}$

Solución:

1. El exponente negativo indica inverso: $a^{-n} = 1/a^n$.
2. $49^{-1/2} = 1/49^{1/2}$.
3. El exponente $\frac{1}{2}$ indica raíz cuadrada: $49^{1/2} = \sqrt{49} = 7$.
4. Así, $49^{-1/2} = 1/7$.

Ejercicio 52: $(-8)^{1/3}$

Solución:

1. El exponente fraccionario $1/3$ indica raíz cúbica.
2. $(-8)^{1/3} = \sqrt[3]{-8}$.

3. La raíz cúbica de un número negativo es negativa: $\sqrt[3]{-8} = -2$.
4. Por lo tanto, $(-8)^{1/3} = -2$.

Ejercicio 53: $8^{-1/3}$

Solución:

1. El exponente negativo significa que tomamos el recíproco: $8^{-1/3} = 1/8^{1/3}$.
2. El exponente fraccionario $1/3$ indica raíz cúbica: $8^{1/3} = \sqrt[3]{8} = 2$.
3. Así, $8^{-1/3} = 1/2$.

Ejercicio 54: $(-27)^{-\frac{4}{3}}$

Solución:

1. Reescribimos el exponente negativo: $a^{-k} = 1/a^k$.
2. Calculamos la potencia positiva: $(-27)^{4/3}$.
3. Escribimos como raíz y potencia: $(-27)^{4/3} = (\sqrt[3]{-27})^4$.
4. Calculamos la raíz cúbica: $\sqrt[3]{-27} = -3$.
5. Elevamos a la cuarta: $(-3)^4 = 81$.
6. Por tanto, $(-27)^{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{81}$.

Ejercicio 55: $0,09^{\frac{5}{2}}$

Solución:

1. Expresamos 0,09 como fracción: $0,09 = \frac{9}{100}$.
2. Aplicamos la potencia fraccionaria: $(\frac{9}{100})^{5/2}$.
3. Recordamos que $a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m$.
4. Calculamos la raíz cuadrada: $\sqrt{\frac{9}{100}} = \frac{3}{10}$.
5. Elevamos a la quinta potencia: $(\frac{3}{10})^5 = \frac{243}{100000}$.
6. En forma decimal: 0,00243.
7. El resultado final es $\frac{243}{100000} = 0,00243$.

Ejercicio 56: $-3^{\frac{7}{12}} \cdot 3^{\frac{29}{12}} + 27^{\frac{2}{3}}$

Solución:

1. Combinamos las potencias de base 3:

$$-3^{\frac{7}{12}} \cdot 3^{\frac{29}{12}} = -3^{\frac{7}{12} + \frac{29}{12}} = -3^3 = -27$$

2. Evaluamos la potencia fraccionaria:

$$27^{\frac{2}{3}} = (3^3)^{\frac{2}{3}} = 3^2 = 9$$

3. Sumamos los resultados:

$$-27 + 9 = -18$$

4. Resultado final: -18 .

Ejercicio 57: $8^{\frac{2}{3}} - 2^{\frac{7}{12}} \cdot 2^{\frac{29}{12}}$

Solución:

1. Convertimos cada término a potencia de base 2.

$$8 = 2^3 \implies 8^{\frac{2}{3}} = (2^3)^{\frac{2}{3}} = 2^{3 \cdot \frac{2}{3}} = 2^2.$$

$$2^{\frac{7}{12}} \cdot 2^{\frac{29}{12}} = 2^{\frac{7}{12} + \frac{29}{12}} = 2^{\frac{36}{12}} = 2^3.$$

2. Evaluamos ambos resultados numéricamente.

$$2^2 = 4, \quad 2^3 = 8.$$

3. Restamos los valores obtenidos.

$$4 - 8 = -4.$$

4. Respuesta final.

$$-4$$

Ejercicio 58: $2^{0,86} \cdot 4^{0,57}$

Solución:

1. Escribimos todas las potencias con la misma base. Observamos que $4 = 2^2$. Por tanto

$$4^{0,57} = (2^2)^{0,57}.$$

2. Aplicamos la ley de la potencia de una potencia $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$:

$$(2^2)^{0,57} = 2^{2 \cdot 0,57} = 2^{1,14}.$$

3. Reescribimos el producto con base común 2.

$$2^{0,86} \cdot 4^{0,57} = 2^{0,86} \cdot 2^{1,14}.$$

4. Sumamos los exponentes (paso explícito). Para potencias de la misma base se cumple $a^m a^n = a^{m+n}$:

$$2^{0,86} \cdot 2^{1,14} = 2^{0,86+1,14} = 2^2.$$

5. Evaluamos la potencia final.

$$2^2 = 4.$$

6. Respuesta final.

$$4$$

Ejercicio 59: $\frac{(5^{2,5})^{-3}}{5^{-4,5}}$

Solución:

1. **Potencia de una potencia.** Usamos la regla $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$. Aplicamos sobre el numerador:

$$(5^{2,5})^{-3} = 5^{2,5 \cdot (-3)} = 5^{-7,5}.$$

2. **Sustitución en la fracción.**

$$\frac{5^{-7,5}}{5^{-4,5}}.$$

3. **Cociente de potencias de la misma base.** Regla: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

$$5^{-7,5-(-4,5)} = 5^{-7,5+4,5} = 5^{-3}.$$

4. **Reescribimos como fracción.** Potencia negativa: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$$5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}.$$

5. Respuesta final.

$$\frac{1}{125}$$

Ejercicio 60: $0,25^{0,25}$

Solución:

1. Convertimos las expresiones decimales a fracciones.

$$0,25 = \frac{1}{4}, \quad 0,25 = \frac{1}{4} \text{ (como exponente).}$$

2. Reescribimos la potencia con fracciones.

$$0,25^{0,25} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

3. Aplicamos la ley $(a/b)^n = a^n/b^n$.

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{1^{\frac{1}{4}}}{4^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{4^{\frac{1}{4}}}.$$

4. Escribimos $4^{\frac{1}{4}}$ como raíz. Como $4 = 2^2$,

$$4^{\frac{1}{4}} = (2^2)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{2}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}.$$

Así,

$$\frac{1}{4^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

5. Racionalizamos el denominador.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

6. Respuesta final (con denominador racional).

$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ejercicio 61: $\frac{20^{40}}{40^{20}}$

Solución:

1. $20^{40} = 2^{40}10^{40}$.
2. $40^{20} = 2^{40}10^{20}$.
3. 2^{40} se simplifica, $10^{40}/10^{20} = 10^{20}$.

Ejercicio 62: $16^{0,25}$

Solución:

1. Pasamos el exponente a fracción.

$$0,25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}.$$

2. Reescribimos la potencia con exponente fraccionario.

$$16^{0,25} = 16^{\frac{1}{4}}.$$

Recordatorio: $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$.

3. Relacionamos la base 16 con una potencia de 2.

$$16 = 2^4.$$

4. Sustituimos y aplicamos la ley $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

$$16^{\frac{1}{4}} = (2^4)^{\frac{1}{4}} = 2^{4 \cdot \frac{1}{4}} = 2^1.$$

5. Concluimos.

$$2^1 = 2.$$

Por tanto,

$$16^{0,25} = 2.$$

Ejercicio 63: $\frac{16^{2,6}}{4^{3,7}}$

Solución:

1. Escribimos los números en función de la base 2.

$$16 = 2^4, \quad 4 = 2^2.$$

2. Reescribimos numerador y denominador usando esas potencias.

$$16^{2,6} = (2^4)^{2,6}, \quad 4^{3,7} = (2^2)^{3,7}.$$

3. Aplicamos la ley de la potencia de una potencia $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$:

$$(2^4)^{2,6} = 2^{4 \cdot 2,6} = 2^{10,4}, \quad (2^2)^{3,7} = 2^{2 \cdot 3,7} = 2^{7,4}.$$

4. Sustituimos en la fracción con base común 2.

$$\frac{16^{2,6}}{4^{3,7}} = \frac{2^{10,4}}{2^{7,4}}.$$

5. Cociente de potencias de la misma base $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$:

$$\frac{2^{10,4}}{2^{7,4}} = 2^{10,4-7,4} = 2^3.$$

6. Evaluamos la potencia resultante.

$$2^3 = 8.$$

7. Respuesta final.

$$8$$

Ejercicio 64: $\left(\frac{4}{2^{\sqrt{2}}}\right)^{2+\sqrt{2}}$

Solución:

1. Escribimos la base como potencia de 2. El numerador 4 es 2^2 , de modo que

$$\frac{4}{2^{\sqrt{2}}} = \frac{2^2}{2^{\sqrt{2}}} = 2^{2-\sqrt{2}} \quad (\text{restamos los exponentes porque se trata de un cociente}).$$

2. Reexpresamos toda la potencia con exponente compuesto. La expresión completa se convierte en

$$\left(2^{2-\sqrt{2}}\right)^{2+\sqrt{2}}.$$

3. Regla de la potencia de una potencia. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$. Aplicamos con $a = 2$, $m = 2 - \sqrt{2}$ y $n = 2 + \sqrt{2}$:

$$\left(2^{2-\sqrt{2}}\right)^{2+\sqrt{2}} = 2^{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}.$$

4. Calculamos el producto $(2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2})$. Es una diferencia de cuadrados:

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2, \quad \text{con } a = 2, b = \sqrt{2}.$$

Entonces

$$(2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2}) = 2^2 - (\sqrt{2})^2 = 4 - 2 = 2.$$

5. Sustituimos el exponente resultante.

$$2^{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} = 2^2.$$

6. Evaluamos la potencia final.

$$2^2 = 4.$$

7. Respuesta final.

$$4$$

Ejercicio 65: $\left(\frac{81}{16}\right)^{3/4}$

Solución:

1. El exponente fraccionario $3/4$ indica: primero la raíz cuarta, luego el cubo, o bien, elevar al cubo y después extraer la raíz cuarta.
2. Calculamos la raíz cuarta de ambos términos:

$$\sqrt[4]{81} = 3, \quad \sqrt[4]{16} = 2$$

3. Entonces:

$$\left(\frac{81}{16}\right)^{1/4} = \frac{3}{2}$$

4. Elevamos al cubo:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$$

5. Por tanto,

$$\left(\frac{81}{16}\right)^{3/4} = \frac{27}{8}$$

Ejercicio 66: $\left(\frac{81}{16}\right)^{-3/4}$

Solución:

1. El exponente negativo $-3/4$ significa tomar el recíproco y luego elevar a la potencia $3/4$:

$$\left(\frac{81}{16}\right)^{-3/4} = \left(\frac{16}{81}\right)^{3/4}$$

2. Calculamos la raíz cuarta de ambos términos:

$$\sqrt[4]{16} = 2, \quad \sqrt[4]{81} = 3$$

3. Entonces,

$$\left(\frac{16}{81}\right)^{1/4} = \frac{2}{3}$$

4. Elevamos al cubo:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

5. Por tanto,

$$\left(\frac{81}{16}\right)^{-3/4} = \frac{8}{27}$$

Ejercicio 67: $\left(\frac{27}{64}\right)^{-2/3}$

Solución:

1. $27 = 3^3, 64 = 4^3$.
2. $(3^3/4^3)^{-2/3} = (3/4)^{-2} = (4/3)^2 = 16/9$.

Radicales (68–100)

Ejercicio 68: $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{2}$

Solución:

1. Expresamos ambas raíces como potencias:

$$\sqrt[3]{4} = 4^{1/3}, \quad \sqrt{2} = 2^{1/2}$$

2. Escribimos $4^{1/3}$ como $2^{2/3}$ (ya que $4 = 2^2$):

$$4^{1/3} = (2^2)^{1/3} = 2^{2/3}$$

3. Multiplicamos: $2^{2/3} \cdot 2^{1/2} = 2^{2/3+1/2}$

4. Buscamos el mínimo común múltiplo de 3 y 2, que es 6:

$$2/3 = 4/6, \quad 1/2 = 3/6$$

5. Sumamos exponentes:

$$2^{4/6+3/6} = 2^{7/6}$$

6. Escribimos como raíz:

$$2^{7/6} = \sqrt[6]{2^7} = \sqrt[6]{128}$$

7. Por tanto,

$$\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{2} = \sqrt[6]{128}$$

Ejercicio 69: $\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}$

Solución:

1. **Propiedad utilizada.** Para números positivos a y b ,

$$\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}.$$

Aplicaremos esta propiedad para unir ambos radicales en una sola raíz cúbica.

2. **Unificamos los radicales.**

$$\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{\frac{81}{3}}.$$

3. **Simplificamos el cociente dentro de la raíz.**

$$\frac{81}{3} = 27.$$

Por tanto,

$$\sqrt[3]{\frac{81}{3}} = \sqrt[3]{27}.$$

4. **Reconocemos un cubo perfecto.** $27 = 3^3$, así que

$$\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3.$$

5. **Respuesta final.**

$$3$$

Ejercicio 70: $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[6]{4}}$

Solución:

1. Escribimos las raíces como potencias:

$$\sqrt[3]{16} = 16^{1/3}, \quad \sqrt[6]{4} = 4^{1/6}$$

2. Sabemos que $16 = 2^4$ y $4 = 2^2$, así que:

$$16^{1/3} = (2^4)^{1/3} = 2^{4/3}$$

$$4^{1/6} = (2^2)^{1/6} = 2^{2/6} = 2^{1/3}$$

3. El cociente es:

$$\frac{2^{4/3}}{2^{1/3}} = 2^{4/3-1/3} = 2^{3/3} = 2^1 = 2$$

4. Respuesta final:

$$\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[6]{4}} = 2$$

Ejercicio 71: $\sqrt{2 \cdot \sqrt[4]{2}}$

Solución:

1. Expresamos ambos factores en forma de radical:

$$2 = 2 \quad \sqrt[4]{2} = 2^{1/4}$$

2. Multiplicamos: $2 \cdot 2^{1/4} = 2^{1+1/4} = 2^{5/4}$.

3. Ahora, aplicamos la raíz cuadrada:

$$\sqrt{2^{5/4}} = \left(2^{5/4}\right)^{1/2} = 2^{5/8}$$

4. Escribimos el resultado en notación radical:

$$2^{5/8} = \sqrt[8]{2^5}$$

5. ****Respuesta final:****

$$\sqrt{2 \cdot \sqrt[4]{2}} = \sqrt[8]{32}$$

Ejercicio 72: $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Solución:

1. Multiplicamos por $\sqrt{2}/\sqrt{2}$.
2. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ejercicio 73: $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

Solución:

1. Multiplicamos por $\sqrt[3]{4}/\sqrt[3]{4}$.
2. Numerador: $\sqrt[3]{4}$, denominador 2.
3. Resultado: $\sqrt[3]{4}/2$.

Ejercicio 74: $(\sqrt{3} - 2\sqrt{2})(\sqrt{3} + 2\sqrt{2})$

Solución:

1. Observamos que el producto tiene la forma $(a - b)(a + b)$, conocida como “producto de conjugados”. Recordemos la identidad:

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2.$$

En nuestro caso

$$a = \sqrt{3}, \quad b = 2\sqrt{2}.$$

2. Aplicamos la identidad:

$$(\sqrt{3} - 2\sqrt{2})(\sqrt{3} + 2\sqrt{2}) = (\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{2})^2.$$

3. Calculamos cada término:

$$(\sqrt{3})^2 = 3, \quad (2\sqrt{2})^2 = 4 \cdot (\sqrt{2})^2 = 4 \cdot 2 = 8.$$

4. Sustituimos para obtener el resultado:

$$3 - 8 = -5.$$

5. **Respuesta final:**

$$-5$$

Ejercicio 75: $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$

Solución:

1. Reconocemos el cuadrado de un binomio:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Aquí

$$a = \sqrt{3}, \quad b = \sqrt{2}.$$

2. Aplicamos la identidad:

$$(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 = (\sqrt{3})^2 + 2(\sqrt{3})(\sqrt{2}) + (\sqrt{2})^2.$$

3. Calculamos cada término:

$$(\sqrt{3})^2 = 3, \quad (\sqrt{2})^2 = 2, \quad 2(\sqrt{3})(\sqrt{2}) = 2\sqrt{6}.$$

4. Sumamos los resultados:

$$3 + 2\sqrt{6} + 2 = 5 + 2\sqrt{6}.$$

5. **Respuesta final:**

$$5 + 2\sqrt{6}$$

Ejercicio 76: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}\right)^2$

Solución:

1. Identificamos un cuadrado de binomio de la forma $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ con

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad b = \sqrt{2}.$$

2. Calculamos cada término:

$$a^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}, \quad b^2 = (\sqrt{2})^2 = 2, \quad 2ab = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot 1 = 2.$$

3. Sustituimos en la identidad:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}\right)^2 = \frac{1}{2} - 2 + 2 = \frac{1}{2}.$$

Ejercicio 77: $\frac{1}{1 + \sqrt{2}}$

Solución:

1. **Planteamiento del problema.** Tenemos la fracción

$$\frac{1}{1 + \sqrt{2}},$$

cuyo denominador contiene la raíz cuadrada $\sqrt{2}$. El objetivo es *racionalizar* el denominador, es decir, transformarlo en un número entero (o, en general, un número sin radicales).

2. **Idea clave.** Para eliminar una raíz cuadrada que aparece sumando o restando con un número entero, multiplicamos por el *conjugado*. El conjugado de $1 + \sqrt{2}$ es $1 - \sqrt{2}$ porque al multiplicarlos aparece la *diferencia de cuadrados*:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

3. **Construcción de la “unidad”.** Multiplicar por $\frac{1 - \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}}$ no cambia el valor de la fracción porque esa razón vale 1:

$$\frac{1 - \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} = 1.$$

4. **Aplicamos el producto por la unidad.**

$$\frac{1}{1 + \sqrt{2}} \cdot \frac{1 - \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} = \frac{1(1 - \sqrt{2})}{(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})}.$$

5. **Desarrollo del denominador usando la identidad** $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$. Tomamos $a = 1$ y $b = \sqrt{2}$:

$$(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = 1^2 - (\sqrt{2})^2.$$

6. **Cálculo explícito de los cuadrados.**

$$1^2 = 1, \quad (\sqrt{2})^2 = 2.$$

Sustituyendo:

$$1^2 - (\sqrt{2})^2 = 1 - 2 = -1.$$

7. **Resultado parcial tras la multiplicación.**

$$\frac{1(1 - \sqrt{2})}{-1} = \frac{1 - \sqrt{2}}{-1}.$$

8. **Simplificación del signo.** Dividir por -1 equivale a cambiar el signo del numerador:

$$\frac{1 - \sqrt{2}}{-1} = -1(1 - \sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1.$$

9. **Verificación.** Observamos que el nuevo denominador es 1, un número entero, por lo que la racionalización está completa y no quedan raíces en él.
10. **Respuesta final totalmente simplificada.**

$$\sqrt{2} - 1$$

Ejercicio 78: $\frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$

Solución:

1. **Planteamiento.** Partimos de la fracción

$$\frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}},$$

cuyo denominador contiene dos raíces que se restan. El propósito es *racionalizar* el denominador: eliminar las raíces que aparezcan en él.

2. **Estrategia: multiplicar por el conjugado.** Para expresiones de la forma $a - b$ con raíces, se utiliza su *conjugado* $a + b$. Aquí

$$a = \sqrt{2}, \quad b = \sqrt{3}, \quad \text{conjugado} = \sqrt{2} + \sqrt{3}.$$

Al multiplicar $(a - b)(a + b)$ se aplica la identidad de diferencia de cuadrados:

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2.$$

3. **Introducción de la “unidad”.** Multiplicamos numerador y denominador por el conjugado, es decir, por $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$, que vale 1. Esto no altera el valor de la fracción, sólo su forma.

$$\frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{1(\sqrt{2} + \sqrt{3})}{(\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{2} + \sqrt{3})}.$$

4. **Cálculo del denominador mediante la identidad** $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$. Tomamos $a = \sqrt{2}$ y $b = \sqrt{3}$:

$$(\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = (\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2.$$

5. **Elevamos al cuadrado cada raíz.**

$$(\sqrt{2})^2 = 2, \quad (\sqrt{3})^2 = 3.$$

Sustituyendo en la resta obtenemos

$$2 - 3 = -1.$$

6. **Resultado intermedio.**

$$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{-1}.$$

7. **Simplificación del signo.** Dividir entre -1 equivale a cambiar el signo del numerador:

$$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{-1} = -(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = -\sqrt{2} - \sqrt{3}.$$

8. **Verificación.** El nuevo denominador es 1 (porque -1 ya fue absorbido en el signo), por lo que no quedan raíces en él y la racionalización está completa.

9. **Respuesta final.**

$$-\sqrt{2} - \sqrt{3}$$

Ejercicio 79: $\frac{1 + \sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}}$

Solución:

1. **Objetivo.** Racionalizar el denominador de

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}}.$$

2. **Conjugado del denominador.** Para $1 - \sqrt{5}$ el conjugado es $1 + \sqrt{5}$. Multiplicar fracciones por $\frac{1 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}}$ (que vale 1) no cambia su valor.

3. **Multiplicación por la unidad.**

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}} \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} = \frac{(1 + \sqrt{5})^2}{(1 - \sqrt{5})(1 + \sqrt{5})}.$$

4. **Cálculo del denominador (producto de conjugados).**

$$(1 - \sqrt{5})(1 + \sqrt{5}) = 1^2 - (\sqrt{5})^2 = 1 - 5 = -4.$$

5. **Cálculo del numerador (cuadrado de binomio).**

$$(1 + \sqrt{5})^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 = 1 + 2\sqrt{5} + 5 = 6 + 2\sqrt{5}.$$

6. **Fracción intermedia.**

$$\frac{6 + 2\sqrt{5}}{-4}.$$

7. **Simplificación.** Dividimos numerador y denominador por -2 :

$$\frac{6 + 2\sqrt{5}}{-4} = -\frac{6}{4} - \frac{2\sqrt{5}}{4} = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

8. **Respuesta final.**

$$-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Ejercicio 80: $\frac{1}{1 + \sqrt[3]{2}}$

Solución:

1. Queremos racionalizar el denominador. Recordemos la identidad $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$. Con $a = 1$ y $b = \sqrt[3]{2}$, multiplicamos por

$$1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}.$$

2. Multiplicamos numerador y denominador por ese factor:

$$\frac{1}{1 + \sqrt[3]{2}} \cdot \frac{1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}}{1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}} = \frac{1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}}{(1 + \sqrt[3]{2})(1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})}.$$

3. Aplicando la identidad, el producto del denominador se convierte en

$$1^3 + (\sqrt[3]{2})^3 = 1 + 2 = 3.$$

4. Por tanto, la fracción queda:

$$\frac{1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}}{3}.$$

5. Respuesta final:

$$\frac{1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}}{3}$$

Ejercicio 81: $\sqrt{98} - \sqrt{32}$

Solución:

1. Descomponemos cada radicando en un factor cuadrado y otro no cuadrado:

$$98 = 49 \cdot 2, \quad 32 = 16 \cdot 2$$

2. Extraemos la raíz de los factores cuadrados:

$$\sqrt{98} = \sqrt{49 \cdot 2} = 7\sqrt{2}, \quad \sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = 4\sqrt{2}$$

3. Sustituimos y restamos términos semejantes:

$$7\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = (7 - 4)\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

4. Resultado final:

$$3\sqrt{2}$$

Ejercicio 82: $\sqrt{18} + \sqrt{8}$

Solución:

1. Descomponemos cada radicando en un factor cuadrado y otro no cuadrado:

$$18 = 9 \cdot 2, \quad 8 = 4 \cdot 2$$

2. Extraemos la raíz de los factores cuadrados:

$$\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}, \quad \sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$$

3. Sustituimos y sumamos términos semejantes:

$$3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = (3 + 2)\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

4. Resultado final:

$$5\sqrt{2}$$

Ejercicio 83: $3\sqrt{45} + \sqrt{20} + \sqrt{80}$

Solución:

1. Descomponemos cada radicando buscando factores cuadrados perfectos:

$$45 = 9 \cdot 5, \quad 20 = 4 \cdot 5, \quad 80 = 16 \cdot 5$$

2. Simplificamos cada raíz:

$$\sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = 3\sqrt{5}, \quad \sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}, \quad \sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} = 4\sqrt{5}$$

3. Sustituimos en la expresión original:

$$3\sqrt{45} + \sqrt{20} + \sqrt{80} = 3(3\sqrt{5}) + 2\sqrt{5} + 4\sqrt{5} = 9\sqrt{5} + 2\sqrt{5} + 4\sqrt{5}$$

4. Sumamos los términos semejantes:

$$(9 + 2 + 4)\sqrt{5} = 15\sqrt{5}$$

5. Resultado final:

$$15\sqrt{5}$$

Ejercicio 84: $\sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{49}{50}} - \sqrt{\frac{25}{18}}$

Solución:

1. **Observación clave.** Cada radicando contiene el factor $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{49}{50} = \frac{49}{25} \cdot \frac{1}{2}, \quad \frac{25}{18} = \frac{25}{9} \cdot \frac{1}{2}.$$

2. Escribimos cada raíz como producto de dos factores, uno de los cuales es $\sqrt{\frac{1}{2}}$.

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{1}{2}} &= \sqrt{\frac{1}{2}}, \\ \sqrt{\frac{49}{50}} &= \sqrt{\frac{49}{25} \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{49}{25}} \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{7}{5} \sqrt{\frac{1}{2}}, \\ \sqrt{\frac{25}{18}} &= \sqrt{\frac{25}{9} \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{25}{9}} \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{5}{3} \sqrt{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

3. **Factor común** $\sqrt{\frac{1}{2}}$.

$$\sqrt{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{7}{5} - \frac{5}{3} \right).$$

4. **Combinamos los coeficientes en el paréntesis.** Con denominador común 15:

$$1 - \frac{7}{5} - \frac{5}{3} = \frac{15}{15} - \frac{21}{15} - \frac{25}{15} = -\frac{31}{15}.$$

5. **Sustituimos y simplificamos.**

$$-\frac{31}{15} \sqrt{\frac{1}{2}} = -\frac{31}{15} \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{31}{15\sqrt{2}}.$$

6. **Racionalización opcional.**

$$-\frac{31}{15\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -\frac{31\sqrt{2}}{30}.$$

7. Respuesta final.

$$-\frac{31\sqrt{2}}{30}$$

Ejercicio 85: $\sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{27}$

Solución:

1. Simplificamos cada radical por separado.

$$\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (\text{racionalizando el denominador}).$$

$$\sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = \sqrt{9} \sqrt{3} = 3\sqrt{3}.$$

2. Reescribimos la suma empleando el mismo radical $\sqrt{3}$:

$$\frac{\sqrt{3}}{3} + 3\sqrt{3}.$$

3. Convertimos a fracciones sobre un mismo denominador (3):

$$3\sqrt{3} = \frac{9\sqrt{3}}{3}.$$

4. Sumamos los numeradores:

$$\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{9\sqrt{3}}{3} = \frac{10\sqrt{3}}{3}.$$

5. Resultado final:

$$\frac{10\sqrt{3}}{3}.$$

Ejercicio 86: $\frac{2^{\sqrt{5}} + 4^{\sqrt{5}}}{2^{\sqrt{5}} + 1}$

Solución:

1. Reescribimos $4^{\sqrt{5}}$ con base 2.

$$4 = 2^2, \text{ por tanto}$$

$$4^{\sqrt{5}} = (2^2)^{\sqrt{5}} = 2^{2\sqrt{5}}.$$

2. Factorizamos el numerador.

$$2^{\sqrt{5}} + 2^{2\sqrt{5}} = 2^{\sqrt{5}} (1 + 2^{\sqrt{5}}).$$

3. Escribimos la fracción con la factorización:

$$\frac{2^{\sqrt{5}}(1 + 2^{\sqrt{5}})}{2^{\sqrt{5}} + 1}.$$

4. Observamos que $1 + 2^{\sqrt{5}} = 2^{\sqrt{5}} + 1$;

son exactamente los mismos términos en distinto orden, así que se cancelan:

$$\frac{2^{\sqrt{5}}(1 + 2^{\sqrt{5}})}{2^{\sqrt{5}} + 1} = 2^{\sqrt{5}}.$$

5. Resultado final:

$$2^{\sqrt{5}}.$$

Ejercicio 87: $\sqrt[3]{(-64)^2}$

Solución:

1. Escribimos -64 como potencia de 2.

Puesto que $64 = 2^6$, tenemos

$$-64 = (-1)2^6.$$

2. Elevamos al cuadrado.

$$((-1)2^6)^2 = (-1)^2 (2^6)^2 = 1 \cdot 2^{12} = 2^{12}.$$

(El signo negativo desaparece porque el exponente es par).

3. Aplicamos la raíz cúbica usando la regla $a^{m/n}$.

$$\sqrt[3]{2^{12}} = (2^{12})^{1/3} = 2^{12 \cdot \frac{1}{3}} = 2^4.$$

4. Evaluamos la potencia.

$$2^4 = 16.$$

5. Resultado final: 16.

Ejercicio 88: $\sqrt[3]{-27}$

Solución:

1. Escribimos -27 como potencia de un número entero.

$$-27 = (-3)^3.$$

2. Aplicamos la raíz cúbica.

Recordemos la regla $\sqrt[3]{a^3} = a$. Entonces

$$\sqrt[3]{(-3)^3} = -3.$$

(Para índices impares, el signo negativo se mantiene).

3. Resultado final: -3 .

Ejercicio 89: $\sqrt{61^2 - 60^2}$

Solución:

1. $61^2 - 60^2 = (61 - 60)(61 + 60) = 1 \cdot 121 = 121$.
2. $\sqrt{121} = 11$.

Ejercicio 90: $\sqrt{(1 - 5)^2}$

Solución:

1. Observamos que la expresión tiene la forma $\sqrt{x^2}$, cuya propiedad fundamental es:

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

2. En este caso, $x = 1 - 5 = -4$.
3. Aplicamos la propiedad:

$$\sqrt{(1 - 5)^2} = |1 - 5| = |-4| = 4$$

4. Por lo tanto, el resultado es 4

Ejercicio 91: $\sqrt{2.\overline{7}}$

Solución:

1. **Conversión del decimal periódico $2.\overline{7}$ a fracción.** Sea $x = 2.\overline{7} = 2,777 \dots$. Multipliquemos por 10 (una cifra decimal, la que se repite):

$$10x = 27.\overline{7}.$$

Restamos la ecuación original:

$$10x - x = 27.\overline{7} - 2.\overline{7} \implies 9x = 25.$$

Por tanto,

$$x = \frac{25}{9}.$$

$$\text{Así, } 2.\overline{7} = \frac{25}{9}.$$

2. **Sustituimos en la raíz.**

$$\sqrt{2.\overline{7}} = \sqrt{\frac{25}{9}}.$$

3. **Descomponemos el radicando como cociente de cuadrados perfectos.** Observamos que $25 = 5^2$ y $9 = 3^2$:

$$\sqrt{\frac{25}{9}} = \sqrt{\frac{5^2}{3^2}}.$$

4. **Aplicamos la propiedad** $\sqrt{\frac{a^2}{b^2}} = \frac{a}{b}$ **(con** $a, b > 0$ **).**

$$\sqrt{\frac{5^2}{3^2}} = \frac{5}{3}.$$

5. **Respuesta final.**

$$\frac{5}{3}$$

Ejercicio 92: $\sqrt{\frac{1.\overline{3}}{3}}$

Solución:

1. **Conversión del decimal periódico $1.\overline{3}$ a fracción.** Sea $x = 1.\overline{3} = 1,333\dots$. Multiplícamos por 10 (una cifra decimal):

$$10x = 13.\overline{3}.$$

Restamos la ecuación original:

$$10x - x = 13.\overline{3} - 1.\overline{3} \implies 9x = 12.$$

Por tanto

$$x = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}.$$

$$\text{Así, } 1.\overline{3} = \frac{4}{3}.$$

2. Sustituimos en el radicando.

$$\sqrt{\frac{1.\bar{3}}{3}} = \sqrt{\frac{4}{3}}.$$

3. Simplificamos la fracción dentro de la raíz.

$$\frac{4}{3} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{9}.$$

Luego la expresión se reduce a

$$\sqrt{\frac{4}{9}}.$$

4. Extraemos la raíz cuadrada de numerador y denominador.

$$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}.$$

5. Respuesta final.

$$\frac{2}{3}$$

Ejercicio 93: $\frac{\sqrt{\frac{8}{5}} + \sqrt{\frac{5}{8}}}{\sqrt{10}}$

Solución:

1. Rescribimos cada raíz con potencias de 2 y 5.

$$\frac{8}{5} = \frac{2^3}{5}, \quad \frac{5}{8} = \frac{5}{2^3}.$$

Por tanto

$$\sqrt{\frac{8}{5}} = \sqrt{\frac{2^3}{5}} = \frac{\sqrt{2^3}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \quad \sqrt{\frac{5}{8}} = \sqrt{\frac{5}{2^3}} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}.$$

2. Hacemos aparecer $\sqrt{10}$ en cada término.

Multiplicamos numerador y denominador de cada fracción por el radical “que falta”:

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{10}}{5}, \quad \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{4}.$$

3. Sumamos los dos numeradores expresados ya con $\sqrt{10}$.

$$\frac{2\sqrt{10}}{5} + \frac{\sqrt{10}}{4} = \sqrt{10} \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{4} \right) = \sqrt{10} \left(\frac{8+5}{20} \right) = \frac{13\sqrt{10}}{20}.$$

4. Dividimos por el denominador $\sqrt{10}$.

$$\frac{\frac{13\sqrt{10}}{20}}{\sqrt{10}} = \frac{13\sqrt{10}}{20} \times \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{13}{20}.$$

5. Resultado final: $\frac{13}{20}$.

Ejercicio 94: $\frac{\sqrt{1,8} \sqrt{1,5}}{\sqrt{0,3}}$

Solución:

1. Reunimos todos los radicales en una sola raíz cuadrada. Utilizamos $\sqrt{a} \sqrt{b} = \sqrt{ab}$

$$\text{y } \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}:$$

$$\frac{\sqrt{1,8} \sqrt{1,5}}{\sqrt{0,3}} = \sqrt{\frac{1,8 \cdot 1,5}{0,3}}.$$

2. Convertimos cada decimal en un producto que incluya 0,1.

$$1,8 = 18 \cdot 0,1, \quad 1,5 = 15 \cdot 0,1, \quad 0,3 = 3 \cdot 0,1.$$

3. Sustituimos en el radicando.

$$\sqrt{\frac{(18 \cdot 0,1)(15 \cdot 0,1)}{3 \cdot 0,1}} = \sqrt{\frac{18 \cdot 15 \cdot 0,1^2}{3 \cdot 0,1}}.$$

4. Simplificamos la fracción dentro de la raíz.

$$\frac{18 \cdot 15}{3} = 18 \cdot 5 = 90, \quad \frac{0,1^2}{0,1} = 0,1,$$

por lo que

$$\sqrt{\frac{18 \cdot 15 \cdot 0,1^2}{3 \cdot 0,1}} = \sqrt{90 \cdot 0,1} = \sqrt{9}.$$

5. Extraemos la raíz cuadrada.

$$\sqrt{9} = 3.$$

6. Respuesta final.

3

Ejercicio 95: $\frac{\sqrt[4]{32} \sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{162}}$

Solución:

1. **Unificamos todos los radicales en una sola raíz de cuarto grado.** Usamos las propiedades $\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ y $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$:

$$\frac{\sqrt[4]{32} \sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{162}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 81}{162}}.$$

2. **Simplificamos la fracción dentro de la raíz.** Observamos que $162 = 2 \cdot 81$, luego

$$\frac{32 \cdot 81}{162} = \frac{32 \cdot 81}{2 \cdot 81} = \frac{32}{2} = 16.$$

3. **Reescribimos el radicando como potencia.** $16 = 2^4$, así que

$$\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2.$$

4. Respuesta final.

2

Ejercicio 96: $\sqrt{425^2 - 200^2}$

Solución:

1. **Reconocemos una diferencia de cuadrados.**

Para dos números cualesquiera a y b ,

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

Así, con $a = 425$ y $b = 200$,

$$425^2 - 200^2 = (425 - 200)(425 + 200).$$

2. **Hacemos las cuentas “pequeñas”.**

$$425 - 200 = 225, \quad 425 + 200 = 625.$$

Luego el radicando se convierte en

$$225 \times 625.$$

3. **Descomponemos cada factor en cuadrados perfectos.**

$$225 = 15^2, \quad 625 = 25^2.$$

Por tanto

$$225 \times 625 = 15^2 25^2 = (15 \times 25)^2 = 375^2.$$

4. **Aplicamos la raíz cuadrada.**

$$\sqrt{(375)^2} = 375 \quad (\text{la raíz "deshace" el cuadrado}).$$

5. **Resultado:** 375.

Ejercicio 97: $\sqrt[5]{0,3^{10}}$

Solución:

1. Recordamos que la raíz enésima puede escribirse como potencia fraccionaria:

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}.$$

Por tanto,

$$\sqrt[5]{0,3^{10}} = (0,3^{10})^{1/5}.$$

2. Aplicamos la ley de las potencias $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$:

$$(0,3^{10})^{1/5} = 0,3^{10 \cdot \frac{1}{5}} = 0,3^2.$$

3. Elevamos 0,3 al cuadrado:

$$0,3^2 = 0,09.$$

Ejercicio 98: $\sqrt{21 \cdot 14 \cdot 6}$

Solución:

1. **Descomposición factorial de cada factor del radicando.**

$$21 = 3 \cdot 7, \quad 14 = 2 \cdot 7, \quad 6 = 2 \cdot 3.$$

2. **Reescribimos el producto completo en factores primos.**

$$21 \cdot 14 \cdot 6 = (3 \cdot 7)(2 \cdot 7)(2 \cdot 3) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2.$$

3. **Identificamos los cuadrados perfectos dentro del radicando.** Cada factor aparece elevado al cuadrado:

$$2^2, 3^2, 7^2.$$

Podemos agruparlos como un único cuadrado:

$$2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2 = (2 \cdot 3 \cdot 7)^2 = 42^2.$$

4. **Aplicamos la propiedad $\sqrt{a^2} = a$ para $a > 0$.**

$$\sqrt{42^2} = 42.$$

5. **Comprobación alternativa (paso a paso).** También podemos sacar cada raíz inmediatamente:

$$\sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2} = \sqrt{2^2} \sqrt{3^2} \sqrt{7^2} = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42.$$

6. **Respuesta final.**

$$42$$

Ejercicio 99: $\sqrt{8 + 2\sqrt{7}}$

Solución: Supongamos que se puede escribir como suma de raíces:

$$\sqrt{8 + 2\sqrt{7}} = \sqrt{A} + \sqrt{B}$$

Elevamos ambos lados al cuadrado:

$$8 + 2\sqrt{7} = (\sqrt{A} + \sqrt{B})^2 = A + 2\sqrt{AB} + B$$

Igualamos la parte racional y la parte irracional:

- $A + B = 8$
- $2\sqrt{AB} = 2\sqrt{7} \implies AB = 7$

Ahora resolvemos el sistema:

$$A + B = 8, \quad AB = 7$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado:

$$x^2 - 8x + 7 = 0 \implies x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 28}}{2} = \frac{8 \pm 6}{2}$$

Por tanto,

$$A = 7, \quad B = 1$$

Así,

$$\sqrt{8 + 2\sqrt{7}} = \sqrt{7} + 1$$

Ejercicio 100: $\sqrt{7 - 2\sqrt{6}}$

Solución: Supongamos que se puede escribir como suma o resta de raíces:

$$\sqrt{7 - 2\sqrt{6}} = \sqrt{A} - \sqrt{B}$$

Elevamos ambos lados:

$$7 - 2\sqrt{6} = (\sqrt{A} - \sqrt{B})^2 = A - 2\sqrt{AB} + B$$

Igualamos las partes racionales e irracionales:

- $A + B = 7$
- $-2\sqrt{AB} = -2\sqrt{6}$, luego $AB = 6$

Resolvemos el sistema:

$$A + B = 7, \quad AB = 6$$

Ecuación de segundo grado:

$$x^2 - 7x + 6 = 0 \implies x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{2} = \frac{7 \pm 5}{2}$$

Así,

$$A = 6, \quad B = 1$$

Por tanto,

$$\sqrt{7 - 2\sqrt{6}} = \sqrt{6} - 1$$