

Cálculo Diferencial: ¿Qué significa derivar? — 10 ejercicios con explicación detallada

Matemáticas con Juan

Introducción

En esta serie de 10 ejercicios veremos, paso a paso, el verdadero significado de derivar. Más allá de aplicar fórmulas, aprenderás a:

- Medir la velocidad instantánea en física.
- Conocer la pendiente de una curva en un punto.
- Determinar dónde una función crece o decrece.
- Encontrar máximos y mínimos.
- Aproximar el valor de una función mediante su recta tangente.

Cada ejercicio incluye una explicación detallada de cada paso, reflexiones sobre el proceso y la interpretación final. ¡Comencemos!

Ejercicio 1: ¿Qué es la derivada? Primera mirada

Planteamiento:

Un objeto se mueve según la ley

$$s(t) = t^2 \quad (\text{en metros}),$$

donde t es el tiempo en segundos. Queremos saber: **¿cuál es la velocidad exacta en el instante $t = 4$ segundos?**

Reflexión:

La velocidad instantánea se obtiene mediante la derivada, ya que no es lo mismo que la velocidad media. Queremos saber la rapidez en ese preciso instante.

Solución paso a paso:

1. Identificamos la función: $s(t) = t^2$.
2. La velocidad es la derivada de la posición: $v(t) = s'(t)$.
3. Derivamos $s(t)$ usando la regla del exponente:

$$s'(t) = \frac{d}{dt} (t^2) = 2t.$$

4. Evaluamos en $t = 4$:

$$v(4) = 2 \times 4 = 8.$$

Interpretación:

A los 4 segundos, el objeto se mueve a 8 m/s; es decir, esa es su velocidad puntual.

Resultado: $\boxed{8 \text{ m/s}}$.

Ejercicio 2: Pendiente en un punto concreto

Planteamiento:

Determinar la pendiente de la curva

$$y = x^2$$

cuando $x = 1$.

Reflexión:

La derivada de y con respecto a x representa la pendiente de la recta tangente en ese punto. Una mayor derivada indica una pendiente más pronunciada.

Solución paso a paso:

1. La función es $y = x^2$.
2. Derivamos:

$$\frac{dy}{dx} = 2x.$$

3. Evaluamos en $x = 1$:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1} = 2 \times 1 = 2.$$

Interpretación:

En $x = 1$, por cada unidad que avanzamos en x , la función aumenta 2 unidades en y .

Resultado: $\boxed{2}$.

Ejercicio 3: La derivada nos dice si sube o baja

Planteamiento:

Analiza si la función

$$f(x) = -x^2 + 4x$$

crece o decrece en $x = 1$ y en $x = 3$.

Reflexión:

Si $f'(x) > 0$, la función crece; si $f'(x) < 0$, decrece; y si $f'(x) = 0$, la pendiente es horizontal.

Solución paso a paso:

1. Derivamos:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(-x^2 + 4x) = -2x + 4.$$

2. En $x = 1$:

$$f'(1) = -2(1) + 4 = 2 \quad (\text{positivo, la función crece}).$$

3. En $x = 3$:

$$f'(3) = -2(3) + 4 = -2 \quad (\text{negativo, la función decrece}).$$

Interpretación:

La función está aumentando en $x = 1$ y, después de alcanzar un punto máximo, comienza a decrecer en $x = 3$.

Ejercicio 4: La derivada como tasa de cambio real

Planteamiento:

La longitud de una bacteria crece según

$$S(t) = 3t^2 \quad (\mu\text{m}),$$

donde t es el tiempo en horas. ¿A qué ritmo (en $\mu\text{m}/\text{h}$) se incrementa su longitud a los 5 horas?

Reflexión:

La derivada $\frac{dS}{dt}$ indica la tasa de cambio de la longitud con respecto al tiempo, es decir, cuántos micrómetros aumenta la bacteria por hora en ese instante.

Solución paso a paso:

1. Derivamos:

$$\frac{dS}{dt} = 6t.$$

2. Evaluamos en $t = 5$:

$$S'(5) = 6 \times 5 = 30.$$

Interpretación:

A las 5 horas, la bacteria está creciendo a razón de $30 \mu\text{m}/\text{h}$.

Resultado: $\boxed{30 \mu\text{m}/\text{h}}$.

Ejercicio 5: ¿Qué pasa cuando la derivada vale cero?

Planteamiento:

La función

$$f(x) = -x^2 + 4x$$

tiene su derivada nula en algún punto. ¿Qué implica que $f'(x) = 0$ en ese punto?

Reflexión:

Una derivada cero indica una pendiente horizontal. Esto puede señalar un máximo, un mínimo o, en algunos casos, un punto de inflexión. Para determinar la naturaleza, se puede analizar la segunda derivada.

Solución paso a paso:

1. Derivamos:

$$f'(x) = -2x + 4.$$

2. Igualamos a cero:

$$-2x + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2.$$

3. Evaluamos $f(x)$ en $x = 2$:

$$f(2) = -(2)^2 + 4(2) = -4 + 8 = 4.$$

4. Para confirmar que es un máximo, derivamos nuevamente:

$$f''(x) = -2.$$

Como $f''(x) < 0$, la función es cóncava y $x = 2$ es un máximo.

Interpretación:

La derivada nula en $x = 2$ indica que la función tiene una cima (máximo) en ese punto.

Resultado: $x = 2$ (máximo) con $f(2) = 4$.

Ejercicio 6: Relación entre pendiente y crecimiento

Planteamiento:

Analiza si la función

$$f(x) = x^3 - 3x$$

está creciendo o decreciendo en $x = 1$ y en $x = 2$.

Reflexión:

La señal de la derivada $f'(x)$ nos dirá si la función está subiendo o bajando. Una derivada positiva implica crecimiento, y negativa, decrecimiento.

Solución paso a paso:

1. Derivamos:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^3 - 3x) = 3x^2 - 3.$$

2. Evaluamos en $x = 1$:

$$f'(1) = 3(1)^2 - 3 = 3 - 3 = 0.$$

La pendiente es cero (podría tratarse de un punto crítico).

3. Evaluamos en $x = 2$:

$$f'(2) = 3(4) - 3 = 12 - 3 = 9 \quad (> 0).$$

Interpretación:

- En $x = 1$ la pendiente es cero, lo que sugiere un cambio en el comportamiento de la función. - En $x = 2$ la función crece, ya que la derivada es positiva.

Ejercicio 7: Velocidad instantánea de un ciclista

Planteamiento:

Un ciclista recorre una ruta según

$$s(t) = 5t^2 - t \quad (\text{en metros}),$$

donde t está en segundos. ¿Cuál es la velocidad del ciclista en $t = 3$ segundos?

Reflexión:

La velocidad instantánea se obtiene derivando la función de posición. Esto nos da la rapidez en ese instante preciso.

Solución paso a paso:

1. Derivamos la función:

$$s'(t) = \frac{d}{dt}(5t^2 - t) = 10t - 1.$$

2. Evaluamos en $t = 3$:

$$s'(3) = 10(3) - 1 = 30 - 1 = 29.$$

Interpretación:

El ciclista viaja a 29 m/s en el instante $t = 3$ segundos.

Resultado: 29 m/s.

Ejercicio 8: Puntos donde la tangente es horizontal

Planteamiento:

Determina los puntos en los que la función

$$f(x) = x^3 - 3x$$

tiene pendiente cero, es decir, donde la recta tangente es horizontal.

Reflexión:

La condición para una tangente horizontal es que la derivada sea igual a cero. Estos puntos suelen ser críticos y pueden corresponder a máximos, mínimos o puntos de inflexión.

Solución paso a paso:

1. Derivamos:

$$f'(x) = 3x^2 - 3.$$

2. Igualamos a cero:

$$3x^2 - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1.$$

Interpretación:

Los puntos $x = 1$ y $x = -1$ son donde la pendiente de la curva es cero.

Resultado: $x = 1$ y $x = -1$.

Ejercicio 9: Derivada y aproximación local

Planteamiento:

Utilizando la recta tangente, estima el valor de

$$f(2,1)$$

para la función

$$f(x) = x^2.$$

Reflexión:

La recta tangente en un punto permite aproximar la función para valores cercanos. Esto se conoce como *linealización*.

Solución paso a paso:

1. Derivamos:

$$f'(x) = 2x \quad \Rightarrow \quad f'(2) = 4.$$

2. Calculamos el valor de la función en $x = 2$:

$$f(2) = 2^2 = 4.$$

3. Escribimos la ecuación de la recta tangente en $x = 2$:

$$y - f(2) = f'(2)(x - 2) \quad \Rightarrow \quad y - 4 = 4(x - 2).$$

4. Estimamos en $x = 2,1$:

$$y - 4 = 4(2,1 - 2) = 4(0,1) = 0,4 \quad \Rightarrow \quad y \approx 4,4.$$

Interpretación:

La aproximación de $f(2,1)$ mediante la tangente en $x = 2$ es 4,4, muy cercana al valor exacto $2,1^2 = 4,41$.

Resultado: $\boxed{4,4}$ (aproximación).

Ejercicio 10: La derivada es un límite

Planteamiento:

Calcula la derivada de la función

$$f(x) = 3x^2$$

en $x = 1$ usando la definición formal de derivada.

Reflexión:

La esencia de derivar es entender que la derivada es el límite de la pendiente de la secante cuando el incremento se hace infinitamente pequeño:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Solución paso a paso:

1. Escribe la definición en $x = 1$:

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}.$$

2. Calcula $f(1)$:

$$f(1) = 3(1)^2 = 3.$$

3. Calcula $f(1+h)$:

$$f(1+h) = 3(1+h)^2 = 3(1+2h+h^2) = 3+6h+3h^2.$$

4. Sustituye en el cociente:

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{(3+6h+3h^2) - 3}{h} = \frac{6h+3h^2}{h} = 6+3h.$$

5. Toma el límite cuando $h \rightarrow 0$:

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} (6+3h) = 6.$$

Interpretación:

El proceso muestra que, al hacer el cambio infinitesimal, la pendiente de la secante se transforma en la pendiente exacta de la tangente en $x = 1$. Por ello, la derivada de $3x^2$ en $x = 1$ es 6.

Resultado: $\boxed{6}$.