

Ejercicios de geometría analítica plana desde 0

Ejercicios resueltos con teoría básica

Versión vídeo de estos ejercicios: <https://youtu.be/nxiWngGXszk>

1 Ejercicio 1: Distancia entre dos puntos

Enunciado: Calcular la distancia entre $A(2, 1)$ y $B(4, 3)$.

Teoría básica

La **distancia euclidiana** entre dos puntos en el plano cartesiano se calcula mediante el teorema de Pitágoras:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Esta fórmula mide la longitud del segmento rectilíneo que une ambos puntos.

Solución

$$d = \sqrt{(4 - 2)^2 + (3 - 1)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

$$2\sqrt{2}$$

2 Ejercicio 2: Punto medio de un segmento

Enunciado: Hallar el punto medio del segmento AB con $A(2, 1)$ y $B(4, 3)$.

Teoría básica

El **punto medio** es el promedio de las coordenadas de los extremos:

$$M \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right).$$

Geoméricamente, es el centro del segmento.

Solución

$$M = \left(\frac{2 + 4}{2}, \frac{1 + 3}{2} \right) = (3, 2).$$

$$M = (3, 2)$$

3 Ejercicio 3: Ecuación de recta por dos puntos

Enunciado: Hallar la ecuación de la recta que pasa por $A(2, 1)$ y $B(4, 3)$.

Teoría básica

La **pendiente** m entre dos puntos es:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Conocida la pendiente, usamos la forma punto-pendiente:

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Solución

$$m = \frac{3 - 1}{4 - 2} = 1.$$

Por tanto,

$$y = x - 1.$$

$$y = x - 1$$

4 Ejercicio 4: Recta con punto y vector dirección

Enunciado: Hallar la ecuación de la recta que pasa por $P(1, 2)$ con vector dirección $\vec{v} = (2, 3)$.

Teoría básica

La **forma paramétrica** expresa las coordenadas en función de un parámetro t :

$$\begin{cases} x = x_0 + v_x t, \\ y = y_0 + v_y t. \end{cases}$$

Para convertir a forma cartesiana, se despeja t y se iguala.

Solución

$$\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 2 + 3t. \end{cases}$$

De la primera ecuación,

$$t = \frac{x - 1}{2}.$$

Sustituyendo:

$$y = 2 + 3 \left(\frac{x - 1}{2} \right) = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}.$$

$$y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$$

5 Ejercicio 5: Distancia de un punto a una recta

Enunciado: Calcular la distancia de $P(1, 3)$ a la recta $2x + 3y - 5 = 0$.

Teoría básica

La fórmula de **distancia punto-recta** es:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Donde $ax + by + c = 0$ es la ecuación general de la recta.

Solución

$$d = \frac{|2(1) + 3(3) - 5|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{6}{\sqrt{13}}.$$

$$\frac{6}{\sqrt{13}}$$

MATEMÁTICAS CON JUAN

Ejercicios de geometría analítica plana desde 0

6 Ejercicio 6: Distancia entre rectas paralelas

Enunciado: Calcular la distancia entre $2x + 3y - 5 = 0$ y $2x + 3y + 2 = 0$.

Teoría básica

Para rectas paralelas

$$ax + by + c_1 = 0 \quad \text{y} \quad ax + by + c_2 = 0,$$

la distancia es:

$$d = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Requiere que ambas rectas estén en la misma forma general.

Solución

En este caso,

$$c_1 = -5, \quad c_2 = 2.$$

Por tanto,

$$d = \frac{|-5 - 2|}{\sqrt{13}} = \frac{7}{\sqrt{13}}.$$

$$\frac{7}{\sqrt{13}}$$

7 Ejercicio 7: Recta perpendicular

Enunciado: Hallar la recta perpendicular a $2x + 3y = 4$ que pasa por $P(1, 2)$.

Teoría básica

Dos rectas son **perpendiculares** si el producto de sus pendientes es -1 :

$$m_1 \cdot m_2 = -1.$$

Primero se despeja la pendiente de la recta original.

Solución

De

$$2x + 3y = 4$$

obtenemos

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}.$$

Luego,

$$m_1 = -\frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad m_2 = \frac{3}{2}.$$

Usando el punto $P(1, 2)$:

$$y - 2 = \frac{3}{2}(x - 1).$$

Por tanto,

$$y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}.$$

$$y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$$

8 Ejercicio 8: Mediatriz de un segmento

Enunciado: Encontrar la mediatriz del segmento con extremos $A(2, 1)$ y $B(4, 3)$.

Teoría básica

La **mediatriz** es el conjunto de puntos equidistantes de ambos extremos.

Para hallarla:

1. Hallar el punto medio.
2. Calcular la pendiente perpendicular.
3. Usar la forma punto-pendiente.

Solución

Primero, el punto medio es:

$$M = \left(\frac{2+4}{2}, \frac{1+3}{2} \right) = (3, 2).$$

La recta AB tiene pendiente

$$m_{AB} = 1.$$

Por tanto, la pendiente perpendicular es:

$$m = -1.$$

Usando el punto $M(3, 2)$:

$$y - 2 = -(x - 3).$$

Así,

$$y = -x + 5.$$

$$y = -x + 5$$

9 Ejercicio 9: Bisectrices de dos rectas

Enunciado: Hallar las bisectrices de $x - 2y = 0$ y $x + 2y = 0$.

Teoría básica

Las bisectrices de dos rectas cumplen:

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

Para rectas que pasan por el origen, las bisectrices son los ejes coordenados cuando las rectas son simétricas respecto de ellos.

Solución

Aplicamos la fórmula:

$$\frac{x - 2y}{\sqrt{5}} = \pm \frac{x + 2y}{\sqrt{5}}.$$

Con el signo positivo:

$$x - 2y = x + 2y \Rightarrow y = 0.$$

Con el signo negativo:

$$x - 2y = -x - 2y \Rightarrow x = 0.$$

Por tanto, las bisectrices son:

$$x = 0 \quad \text{e} \quad y = 0.$$

$$x = 0 \quad \text{e} \quad y = 0$$

10 Ejercicio 10: Recta paralela

Enunciado: Hallar la recta paralela a $x + 2y = 5$ que pasa por $(1, -1)$.

Teoría básica

Rectas **paralelas** comparten la misma pendiente:

$$m_1 = m_2.$$

Se mantienen siempre equidistantes y nunca se intersectan.

Solución

De

$$x + 2y = 5$$

obtenemos:

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}.$$

La pendiente es:

$$m = -\frac{1}{2}.$$

Usando el punto $(1, -1)$:

$$y + 1 = -\frac{1}{2}(x - 1).$$

Por tanto,

$$y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}.$$

$$y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

Conclusión final

Dominando estos 10 ejercicios fundamentales con su teoría asociada, estarás preparado para abordar problemas más complejos de geometría analítica y sus aplicaciones.