

Funciones Esenciales en Matemáticas

Matemáticas con Juan

Vídeo de la clase: <https://youtu.be/ZNz9ZYpzXcw>

Ejercicio 1. Definición de función

Qué es una función? Explica su definición y da un ejemplo.

Respuesta

Una función es una relación entre dos conjuntos en la que a cada elemento del **dominio** le corresponde **un único** valor del conjunto de llegada.

Dicho de forma más simple: una función toma cada valor de entrada y le asigna exactamente una salida. Un ejemplo sencillo es

$$f(x) = 2x + 1.$$

Por ejemplo,

$$f(0) = 1, \quad f(2) = 5, \quad f(-1) = -1.$$

Así, cada valor de x tiene asociada una sola imagen.

Ejercicio 2. Funciones lineales

Representa gráficamente las funciones

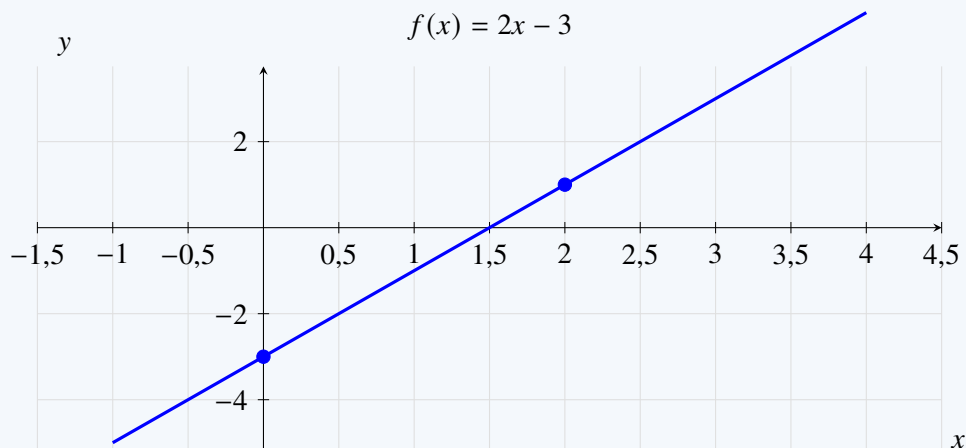
$$f(x) = 2x - 3 \quad \text{y} \quad g(x) = -x + 4.$$

Respuesta

a) **Representación de** $f(x) = 2x - 3$

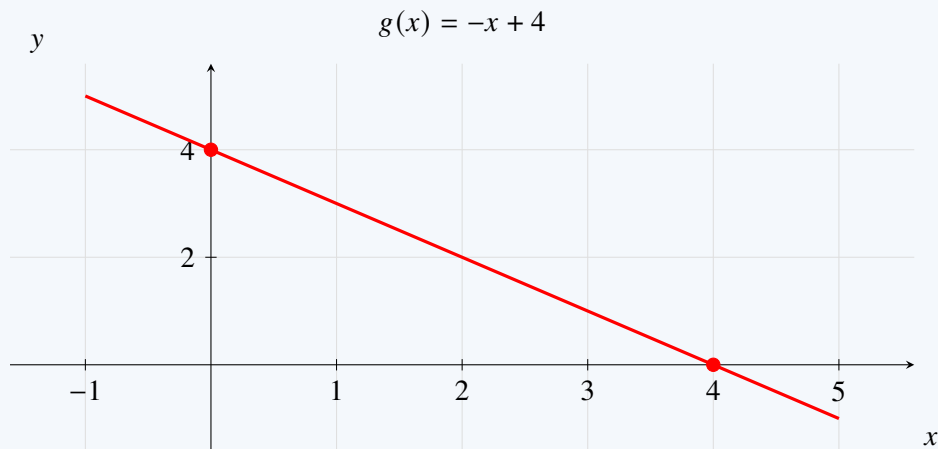
Para representar una función lineal basta con hallar dos puntos de la recta.

$$x = 0 \implies f(0) = -3 \implies (0, -3) \quad x = 2 \implies f(2) = 1 \implies (2, 1)$$



b) Representación de $g(x) = -x + 4$

$$x = 0 \implies g(0) = 4 \implies (0, 4) \quad x = 4 \implies g(4) = 0 \implies (4, 0)$$

**Conclusión:**

- $f(x) = 2x - 3$ pasa por $(0, -3)$ y $(2, 1)$.
- $g(x) = -x + 4$ pasa por $(0, 4)$ y $(4, 0)$.

Ejercicio 3. Funciones cuadráticas

Pregunta: Representa las funciones

$$y = x^2 - 4x + 3 \quad \text{y} \quad y = -x^2 + 4x - 3.$$

Respuesta

a) $y = x^2 - 4x + 3$

Vamos a obtener de forma razonada el vértice y los puntos de corte con los ejes.

Vértice

En una función cuadrática de la forma

$$y = ax^2 + bx + c,$$

la abscisa del vértice se obtiene con la fórmula

$$x_v = \frac{-b}{2a}.$$

En este caso,

$$a = 1, \quad b = -4, \quad c = 3.$$

Entonces,

$$x_v = \frac{-(-4)}{2 \cdot 1} = \frac{4}{2} = 2.$$

Ahora calculamos la ordenada del vértice:

$$y_v = f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1.$$

Por tanto, el vértice es

$$(2, -1).$$

Como $a = 1 > 0$, la parábola abre hacia arriba.

Cortes con el eje x

Para hallar los puntos de corte con el eje x , imponemos

$$y = 0.$$

Entonces:

$$x^2 - 4x + 3 = 0.$$

Factorizamos:

$$(x - 1)(x - 3) = 0.$$

De aquí:

$$x = 1 \quad \text{o} \quad x = 3.$$

Por tanto, los puntos de corte con el eje x son

$$(1, 0) \quad \text{y} \quad (3, 0).$$

Corte con el eje y

Para hallar el corte con el eje y , tomamos

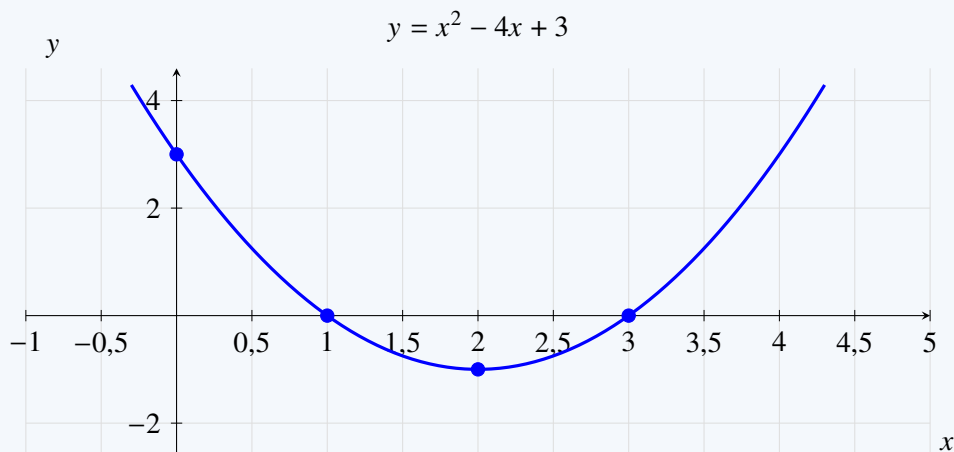
$$x = 0.$$

Entonces:

$$y = 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 3.$$

Por tanto, el punto de corte con el eje y es

$$(0, 3).$$



b) $y = -x^2 + 4x - 3$

Procedemos de la misma manera.

Vértice

Aquí,

$$a = -1, \quad b = 4, \quad c = -3.$$

Aplicamos la fórmula:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(-1)} = \frac{-4}{-2} = 2.$$

Ahora calculamos la ordenada del vértice:

$$y_v = f(2) = -(2)^2 + 4 \cdot 2 - 3 = -4 + 8 - 3 = 1.$$

Por tanto, el vértice es

$$(2, 1).$$

Como $a = -1 < 0$, la parábola abre hacia abajo.

Cortes con el eje x

Imponemos

$$\begin{aligned} y &= 0 : \\ -x^2 + 4x - 3 &= 0. \end{aligned}$$

Multiplicamos por -1 :

$$x^2 - 4x + 3 = 0.$$

Factorizamos:

$$(x - 1)(x - 3) = 0.$$

Así,

$$x = 1 \quad \text{o} \quad x = 3.$$

Por tanto, los puntos de corte con el eje x son

$$(1, 0) \quad \text{y} \quad (3, 0).$$

Corte con el eje y

Tomamos

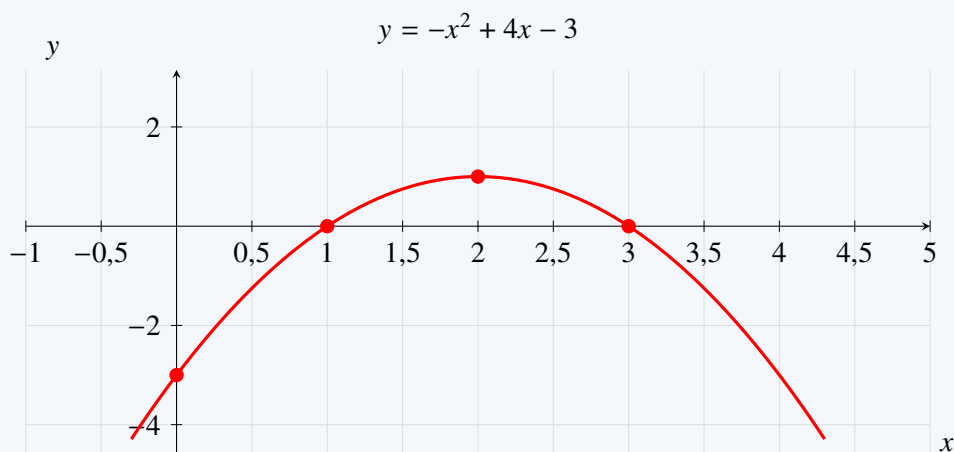
$$x = 0.$$

Entonces:

$$y = -(0)^2 + 4 \cdot 0 - 3 = -3.$$

Por tanto, el punto de corte con el eje y es

$$(0, -3).$$

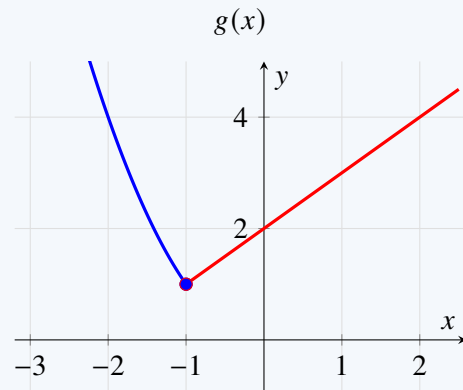
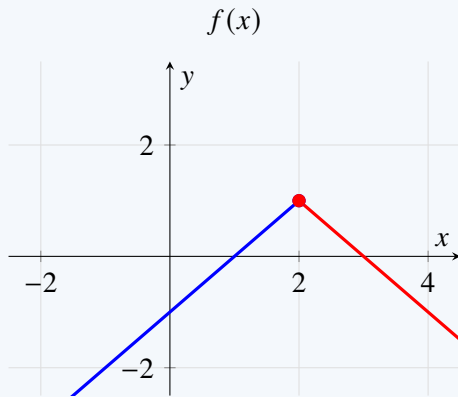


Ejercicio 4. Funciones definidas a trozos

Dibuja las funciones

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & x < 2, \\ 3 - x, & x \geq 2, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq -1, \\ x + 2, & x > -1. \end{cases}$$

Respuesta



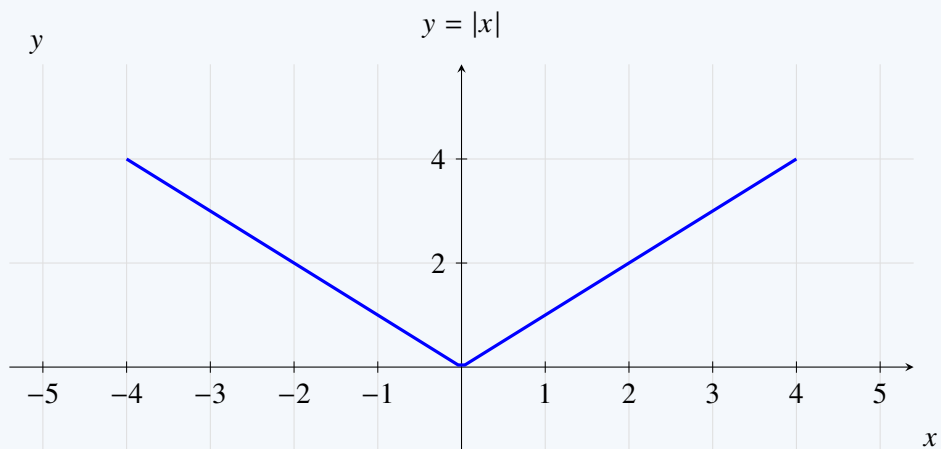
Ejercicio 5. Funciones de valor absoluto

Representa estas tres funciones:

- a) $y = |x|$
- b) $y = |x| + 1$
- c) $y = |x - 1|$

Respuesta

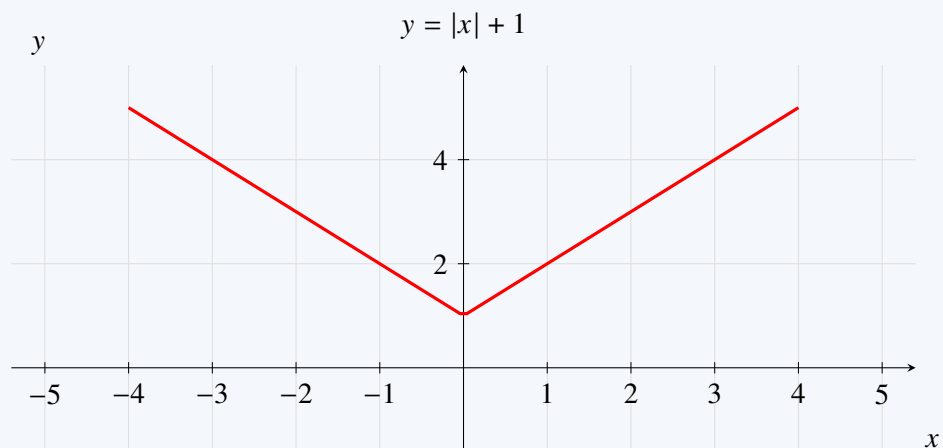
a) $y = |x|$



La gráfica tiene forma de V, con vértice en el origen:

$$(0, 0).$$

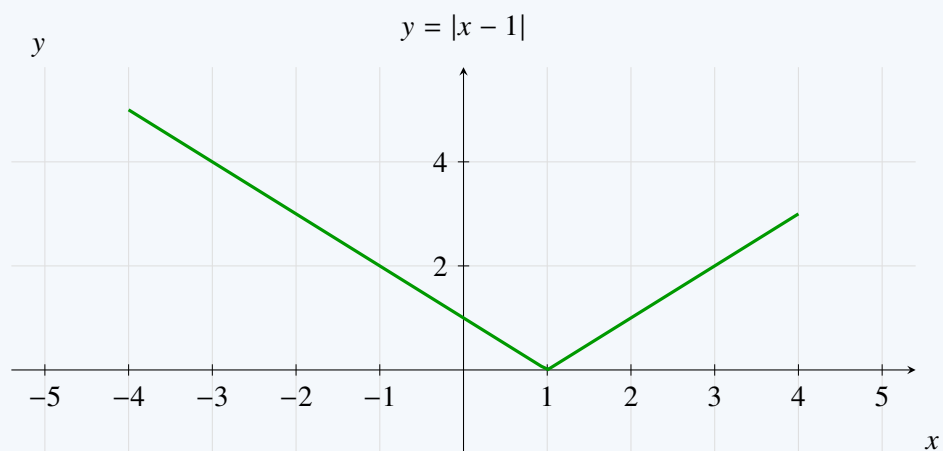
b) $y = |x| + 1$



Esta gráfica es la de $y = |x|$ desplazada una unidad hacia arriba. Su vértice es:

$$(0, 1).$$

c) $y = |x - 1|$



Esta gráfica es la de $y = |x|$ desplazada una unidad hacia la derecha. Su vértice es:

$$(1, 0).$$

Ejercicio 6. Funciones exponenciales

Representa estas cuatro funciones:

a) $y = 2^x$

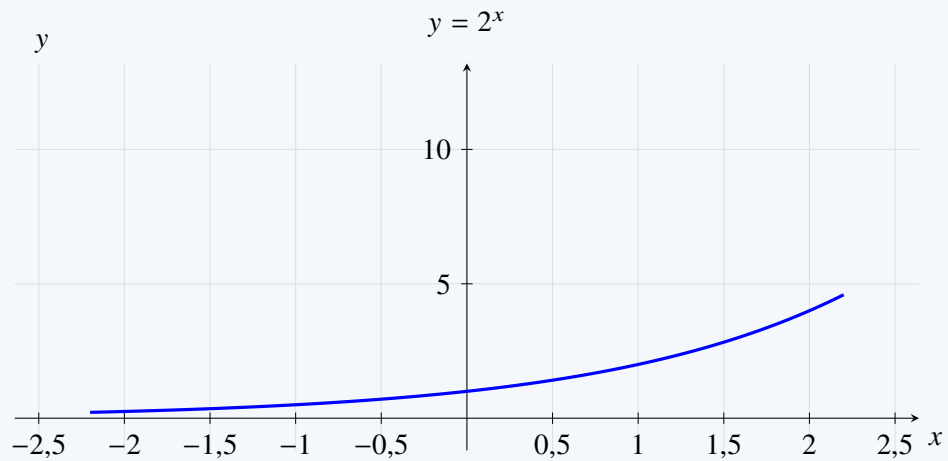
b) $y = 3^x$

c) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

d) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

Respuesta

a) $y = 2^x$



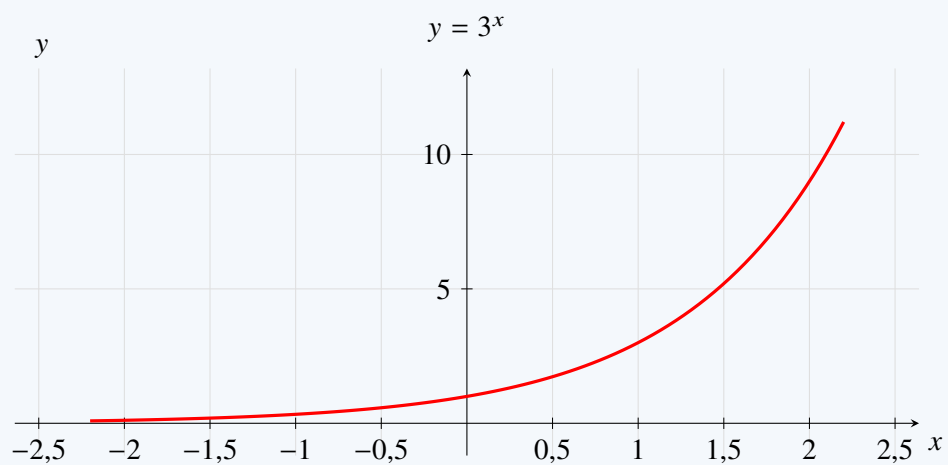
Esta función es creciente, pasa por el punto

$$(0, 1),$$

y tiene asíntota horizontal en

$$y = 0.$$

b) $y = 3^x$

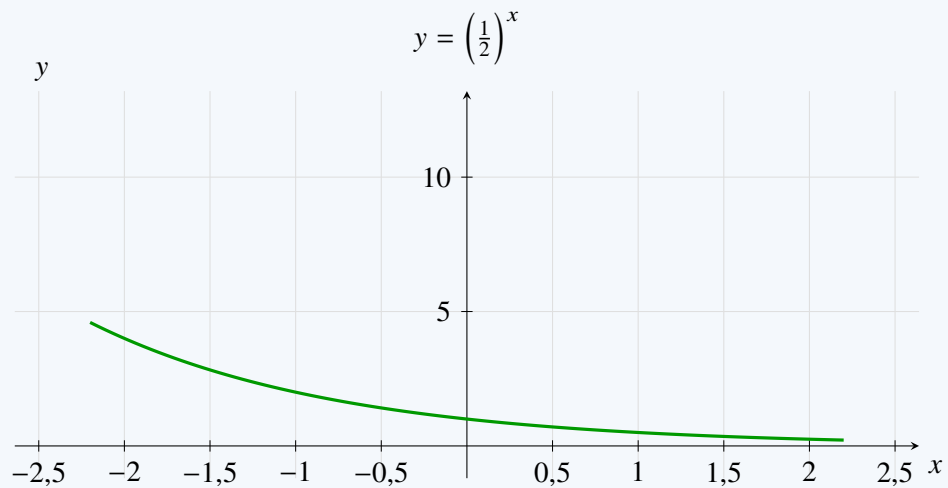


Esta función también es creciente, pasa por

$$(0, 1),$$

y crece más rápidamente que 2^x .

c) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



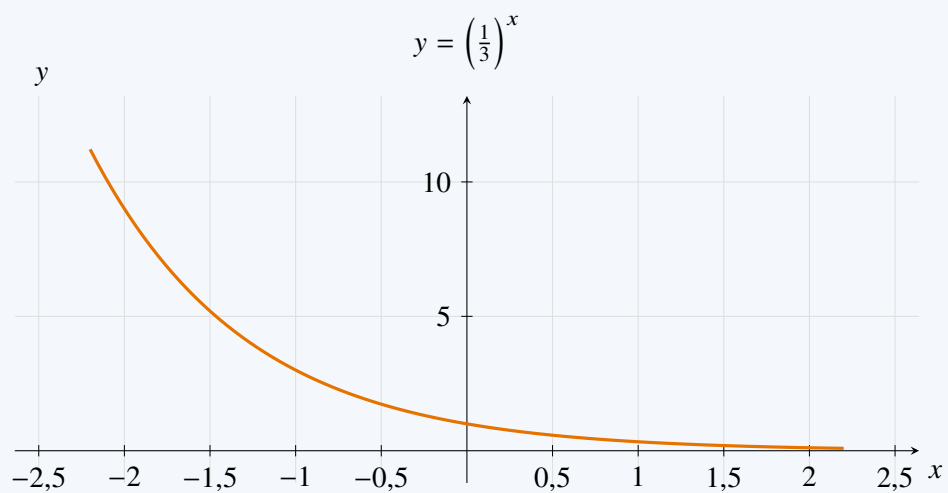
Esta función es decreciente, pasa por

$$(0, 1),$$

y tiene asíntota horizontal en

$$y = 0.$$

d) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$



Esta función también es decreciente, pasa por

$$(0, 1),$$

y decrece más rápidamente que

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x.$$

Ejercicio 7. Funciones logarítmicas

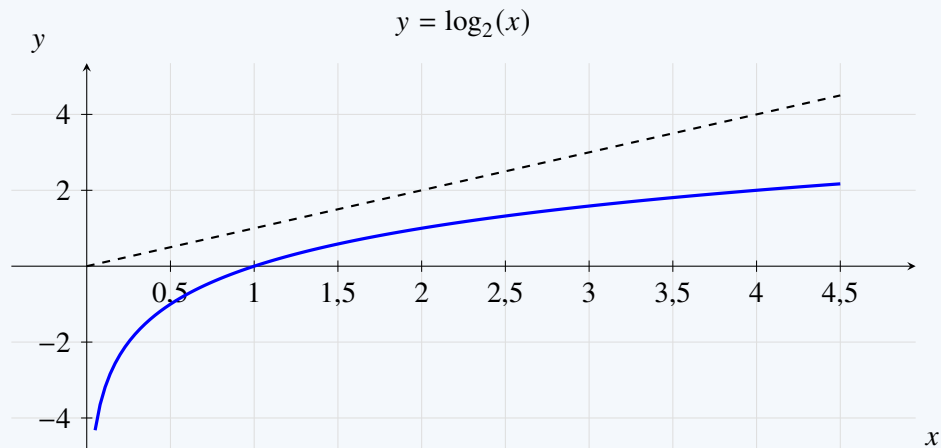
Representa estas dos funciones:

a) $y = \log_2(x)$

b) $y = \log_{\frac{1}{2}}(x)$

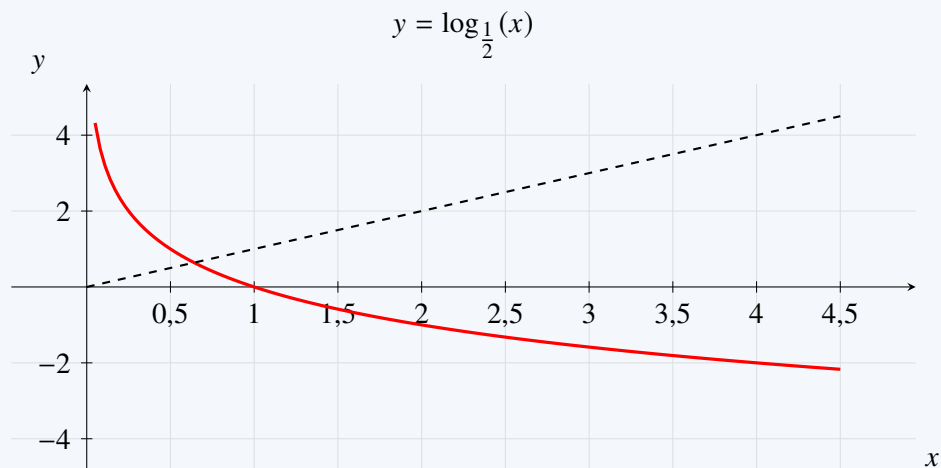
Respuesta

a) $y = \log_2(x)$



Esta función es creciente, pasa por el punto $(1, 0)$ y tiene asíntota vertical en $x = 0$.

b) $y = \log_{\frac{1}{2}}(x)$



Esta función es decreciente, pasa por el punto $(1, 0)$ y también tiene asíntota vertical en $x = 0$.

Ejercicio 8. Funciones trigonométricas

Representa estas tres funciones:

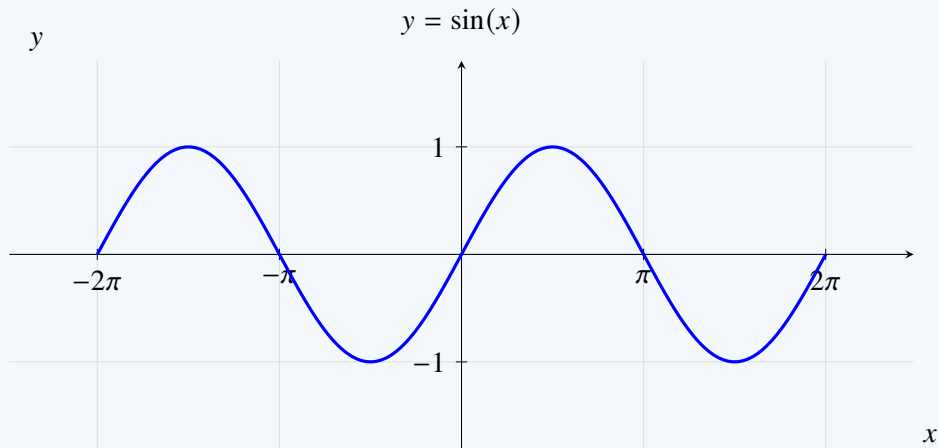
a) $y = \sin(x)$

b) $y = \cos(x)$

c) $y = \tan(x)$

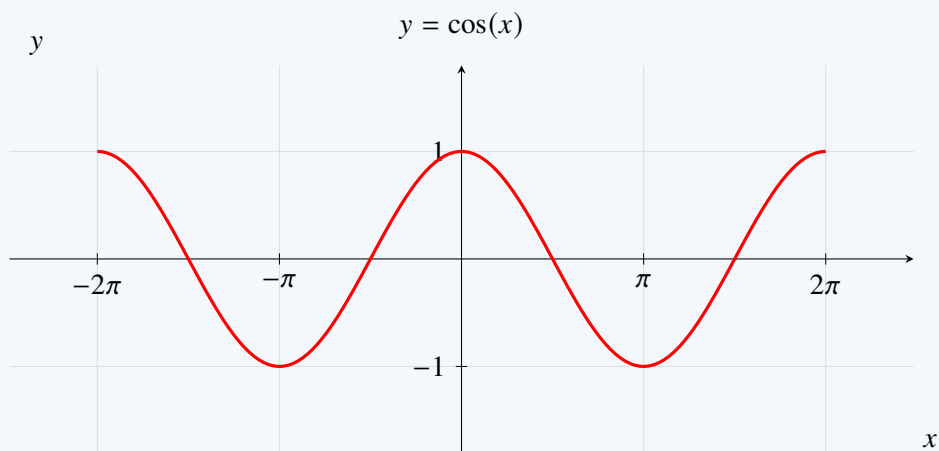
Respuesta

a) $y = \sin(x)$



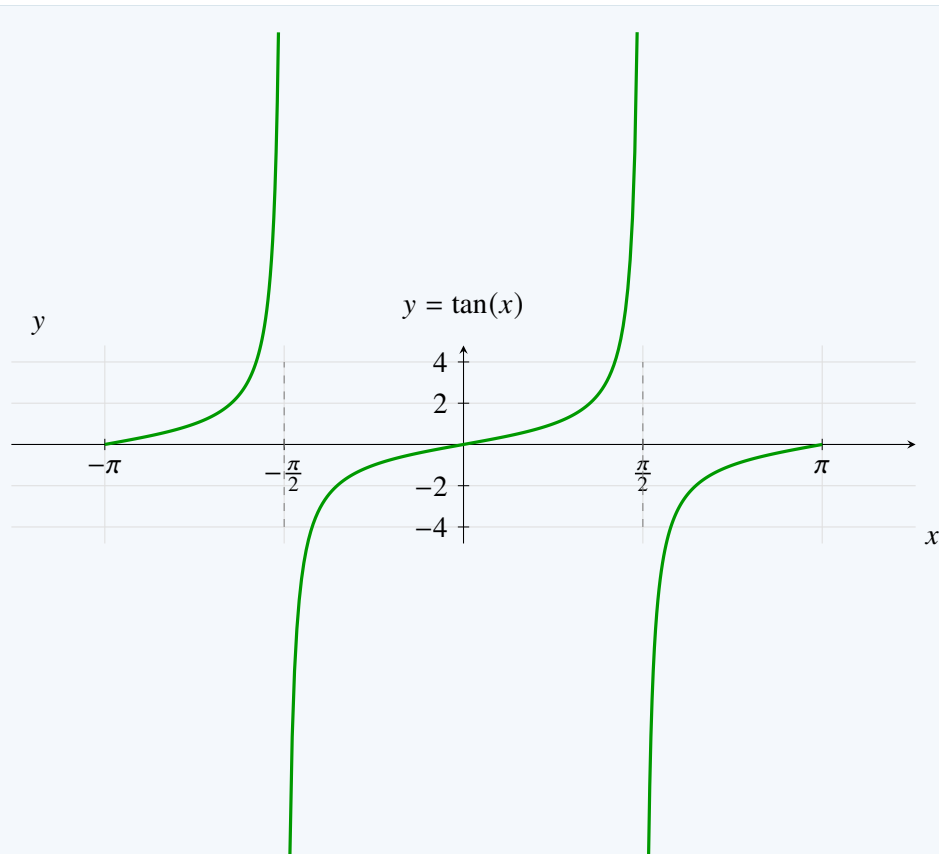
La función seno tiene período 2π , está acotada entre -1 y 1 , y pasa por el origen.

b) $y = \cos(x)$



La función coseno también tiene período 2π , está acotada entre -1 y 1 , y toma el valor 1 en $x = 0$.

c) $y = \tan(x)$



La función tangente tiene período π , pasa por el origen y presenta asíntotas verticales en

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Conclusión

A través de las gráficas de las funciones podemos ver de forma muy clara el comportamiento de estas. Hemos hecho un estudio de rectas, parábolas, funciones a trozos, valores absolutos, exponenciales, logaritmos y funciones trigonométricas. Espero que te haya sido de provecho.

Vídeo de la clase: <https://youtu.be/ZNz9ZYpzXcw>